Matemáticas 3

Habilidades y competencias

Secundaria

Javier Ángeles Ángeles
Ramón Guerrero Leyva
Elías Loyola Campos

ÁNGELES EDITORES

MATEMÁTICAS 3
HABILIDADES Y COMPETENCIAS

GABRIEL ÁNGELES
Y JAVIER ÁNGELES II: Coordinación editorial
ANDRÉS RIVERA: Asesoría en tecnología
ALMA VELÁZQUEZ: Corrección de estilo
ANA GARZA: Diseño, diagramación y formación
MÓNICA MOLINA: Corrección de estilo
ROSARIO PREISSER: Asesoría en evaluación

Campanario 26
San Pedro Mártir, Tlalpan
México, D.F., C.P. 14650
Tel. (55) 55 13 28 82
e-mail angeleseditores@yahoo.com
www.angeleseditores.com

Primera edición: diciembre de 2013

ISBN En trámite

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial
Reg. Núm. 2608

Impreso en México
Printed in Mexico

Palabras al estudiante

El libro que tienes en tus manos te acompañará durante el presente ciclo escolar en tus clases de matemáticas. A continuación te explicaremos algunos aspectos del contenido para que su uso te resulte interesante, estimulante y agradable.

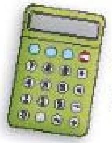
El libro ha sido elaborado con el enfoque de resolución de problemas. En cada lección se presentan una o varias situaciones problemáticas que resolverás por medio de actividades y de esa manera adquirirás el aprendizaje y la competencia que se espera logres en cada lección.

Probablemente te preguntarás: ¿cómo se aprende a resolver problemas? La respuesta es inmediata: se aprende a resolver problemas resolviendo problemas. De la misma manera que se aprende a nadar o andar en bicicleta realizando estas actividades, la manera de adquirir habilidades y competencias matemáticas es ejercitándolas. Por ello te sugerimos que dediques tiempo, concentración y esfuerzo al trabajo individual y colectivo en el salón de clases y a las tareas y revisiones que realices en casa.

Para resolver un problema es útil preguntarse qué recurso o herramienta nos puede servir y si ya hemos resuelto alguno semejante. También es útil hacer esquemas o diagramas y probar uno o más procedimientos. Los intentos que hagas para resolver un problema son, desde el punto de vista educativo, tan importantes como resolver el problema mismo.

Para aprender, ser hábil y competente en matemáticas es necesario, además de la guía del profesor y el estudio individual, el trabajo en parejas, en equipo y en grupo. Discutir e intercambiar puntos de vista con los compañeros; confrontar resultados y estrategias de solución; comparar procedimientos para abordar un problema, son de gran utilidad para corroborar, corregir y ampliar enfoques, pues obligan a ordenar las ideas propias y promueven la correcta expresión de argumentos y métodos.

Cada lección consta de dos páginas y las actividades presentan los siguientes iconos:

Individual — En pareja — En equipo — Entre todo el grupo —  Con calculadora

En algunas actividades se propone el uso de calculadora para agilizar el trabajo, aunque en la mayoría de los casos es recomendable hacerlo mentalmente o con papel y lápiz. Ten en cuenta que si ejercitas distintas maneras de hacer cálculos, podrás decidir cuál es la más conveniente para resolver un problema. También se sugiere complementar algunos temas con programas y equipo de cómputo, cuando sea posible.

¡Te deseamos éxito en el desarrollo de tus habilidades y competencias matemáticas!

Los autores

El libro **Matemáticas 3. Habilidades y competencias** supone que es usted quien promueve el trabajo autónomo y colaborativo de los alumnos y conduce el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La metodología con la que se desarrollan los contenidos del libro se basa en el enfoque de resolución de problemas, planteando éstos como situaciones de aprendizaje.

Al inicio de la mayor parte de las lecciones se pretende ubicar al alumno en situaciones que lo motiven a dar respuestas, buscar herramientas, recuperar conocimientos, adoptar una actitud reflexiva y participar activamente en el desarrollo de un tema o contenido, sea contestando preguntas, justificando respuestas, calculando valores, completando tablas y desarrollos algorítmicos, o formulando conjeturas.

Se propone fundamentalmente el trabajo en pareja, en equipo y grupal, ya que estas modalidades enriquecen la visión individual del alumno, estimulan su inventiva y favorecen el aprendizaje. La actividad compartida promueve la necesidad de organizar las ideas, exponer en forma clara los argumentos personales, complementar información y emplear alternativas metodológicas o técnicas para enfrentar y resolver problemas.

Con alguna frecuencia se incluye bajo el título de *Reto* algún ejercicio, problema o pregunta, cuya resolución no requiere conceptos o herramientas adicionales al contenido del bloque, sino más bien ingenio y, sobre todo, perseverancia. Es recomendable estimular a los alumnos a que resuelvan los *Retos*, ya sea de manera individual o en equipo, a fin de que apliquen lo aprendido y experimenten la satisfacción de resolver problemas y sentirse competentes.

La propuesta de *Dosificación* de los contenidos del programa puede adecuarse a las condiciones de cada grupo, en función del desempeño de los estudiantes en cada bloque o del tipo de contenido abordado.

Al inicio de cada bloque se mencionan los aprendizajes y contenidos que se espera adquieran y asimilen los alumnos. Esto los ayuda a ser conscientes de los objetivos que deben alcanzar y promueve la autoevaluación.

Al término de cada bloque se incluye una evaluación semejante al modelo empleado en los exámenes Enlace y PISA. Usted decidirá la pertinencia de emplearla y hacer las adaptaciones o modificaciones que considere convenientes. Asimismo, el estudiante puede aprovechar estos cuestionarios para auto-evaluarse.

El rubro *Complemento tecnológico*, ubicado en las páginas finales del libro, reúne algunos ejemplos de las posibilidades que brindan las herramientas computacionales para el aprendizaje de las matemáticas. Es importante que los alumnos conozcan dichas herramientas y aprovechen los recursos informáticos cuando dispongan de ellos en la escuela o fuera de ella.

En la bibliografía para estudiantes se mencionan algunas obras, tanto impresas como en páginas electrónicas, que pueden usarse para complementar las clases con información histórica o recreativa. La bibliografía para docentes, por su parte, contiene fuentes en las que se puede profundizar y abundar en los contenidos del curso, así como diversificar y complementar los temas de dichos contenidos.

Deseamos que **Matemáticas 3. Habilidades y competencias** sea un libro de gran utilidad para usted y favorezca su encomiable labor.

Los autores

Conoce tu libro

Tu libro **Matemáticas 3. Habilidades y competencias**, que estudiarás durante este curso, está dividido en cinco bloques, que corresponden a los cinco bimestres del ciclo escolar. Cada bloque inicia con una doble página, cuyo contenido es el siguiente.

Entrada de bloque

Texto que describe la ilustración que acompaña a esta página

Ilustración que muestra alguna aplicación interesante de un tema del bloque

Aprendizajes esperados del bloque

Contenidos que estudiarás en el bloque

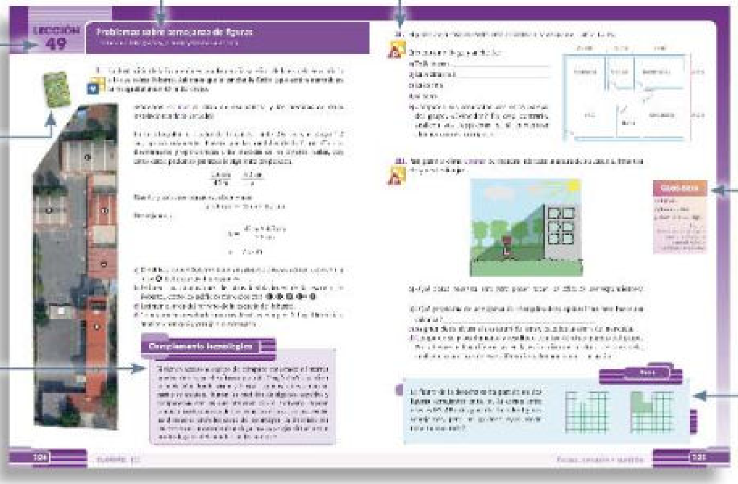
Doble página para cada una de las lecciones del curso

Título de la lección

Número de lección

Se propone el uso de calculadora

Complemento tecnológico

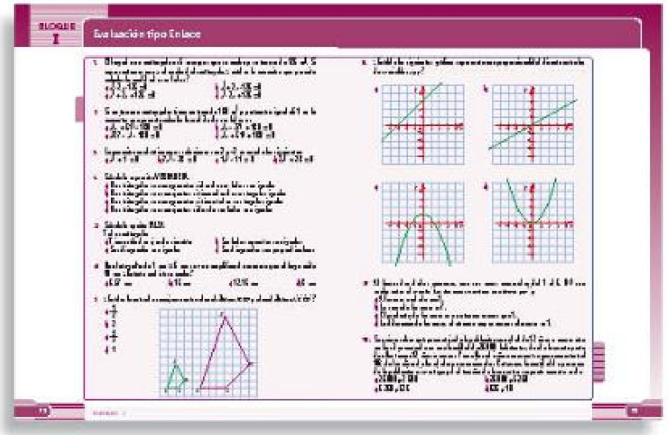


Actividades propuestas para lograr los aprendizajes esperados

Glosario, en donde se da el significado de un término nuevo

Reto relacionado con el contenido de la lección

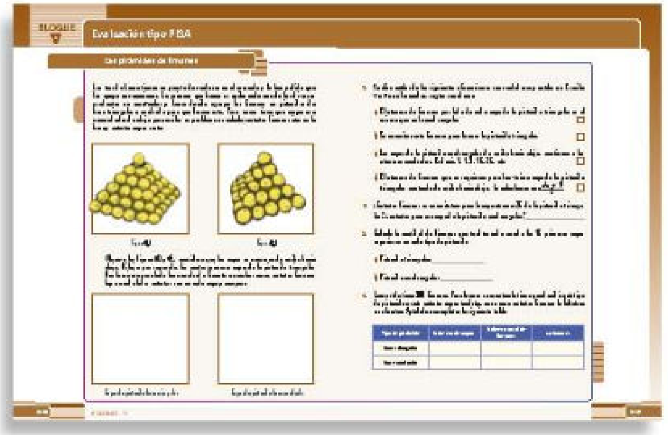
Evaluación tipo Enlace



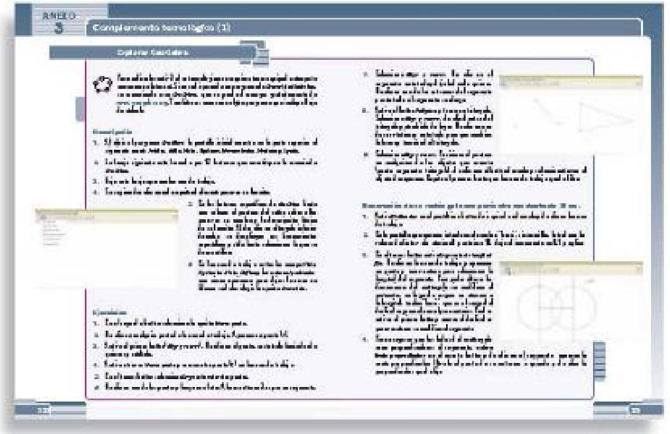
Al final de cada bloque se propone una evaluación relativa a los aprendizajes esperados, útiles para evaluar competencias y habilidades

Evaluación tipo PISA

Al final de cada bloque se propone una evaluación relativa a los aprendizajes esperados, útiles para evaluar competencias y habilidades



Complemento tecnológico



En esta sección se incluyen ejemplos sobre las posibilidades de aprovechar la tecnología para complementar el aprendizaje del contenido de la lección

Dosificación

Esta propuesta de dosificación es una estimación de los tiempos que podrán asignarse a cada uno de los contenidos de la asignatura. Su propósito es apoyar la planeación de las actividades por parte del maestro, para lograr que sus estudiantes obtengan los aprendizajes esperados. Los tiempos asignados podrán ajustarse de acuerdo al criterio del profesor con base en las condiciones de los alumnos, a algunos contenidos habrá que dedicarles más tiempo y a otros menos, siempre y cuando se logren cubrir los cinco bloques durante el ciclo escolar. En esta dosificación se asignó un color distinto a cada uno de los ejes: **azul** para *Sentido numérico y pensamiento algebraico*; **amarillo** para *Forma, espacio y medida*; y **verde** para *Manejo de la información*. En el cuerpo del libro cada bloque tiene también diferente color.

BLOQUES	SEMANAS 1	SEMANAS 2	SEMANAS 3	SEMANAS 4
I	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. Lecciones 1, 2, 3 y 4	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados, rectángulos) y análisis de sus propiedades. Lecciones 5, 6 y 7	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados, rectángulos) y análisis de sus propiedades. Lecciones 8, 9 y 10	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada. Lecciones 11, 12, 13 y 14
II	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. Lecciones 29, 30 y 31	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Lecciones 32, 33 y 34	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. Lecciones 35, 36 y 37	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. Lecciones 38 y 39
III	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones. Lecciones 46, 47 y 48	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. Lecciones 49, 50 y 51	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. Lecciones 52, 53 y 54	Aplicación de la semejanza en la construción de figuras homotéticas. Lecciones 55 y 56
IV	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión. Lecciones 68, 69 y 70	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Lecciones 71 y 72	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Lecciones 73, 74, 75 y 76	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. Lecciones 77 y 78
V	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. Lecciones 90 y 91	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. Lección 92	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. Lecciones 93 y 94	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. Lecciones 95 y 96

BLOQUES	SEMANAS 5	SEMANAS 6	SEMANAS 7	SEMANAS 8	SEMANAS 9
I	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. Lecciones 15, 16, 17, 18 y 19	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. Lecciones 20 y 21	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. Lecciones 22, 23, 24 y 25	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación. Lecciones 26, 27 y 28	**Evaluación tipo Enlace** **Evaluación tipo PISA**
II	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. Lecciones 40 y 41	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. Lecciones 42 y 43	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma). Lecciones 44 y 45	**Evaluación tipo Enlace** **Evaluación tipo PISA**	
III	Aplicación de la semejanza en la construción de figuras homotéticas. Lecciones 57 y 58	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. Lecciones 59, 60, 61 y 62	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera. Lecciones 63 y 64	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto). Lecciones 65, 66 y 67	**Evaluación tipo Enlace** **Evaluación tipo PISA**
IV	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Lecciones 79, 80, 81 y 82	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa. Lecciones 83, 84, 85 y 86	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión. Lecciones 87, 88 y 89	**Evaluación tipo Enlace** **Evaluación tipo PISA**	
V	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas. Lecciones 97 y 98	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. Lecciones 99 y 100	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. Lecciones 101, 102 y 103	**Evaluación tipo Enlace** **Evaluación tipo PISA**	

Índice

Palabras al estudiante	3
Palabras al docente	4
Conoce tu libro	6
Dosificación	8

BLOQUE I		14			
Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
1	Rectángulos, perímetros y áreas (1)	16	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
2	Rectángulos, perímetros y áreas (2)	18			
3	Ecuaciones cuadráticas (1)	20			
4	Ecuaciones cuadráticas (2)	22			
5	Figuras congruentes	24	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados, rectángulos) y análisis de sus propiedades.
6	Construcción de triángulos congruentes (1)	26			
7	Construcción de triángulos congruentes (2)	28			
8	Construcción de rectángulos y cuadrados	30			
9	Construcción de figuras semejantes (1)	32			
10	Construcción de figuras semejantes (2)	34			
11	Criterios de congruencia de triángulos	36			Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
12	Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos	38			
13	Criterios de semejanza de triángulos (1)	40			
14	Criterios de semejanza de triángulos (2)	42			
15	Relaciones de proporcionalidad (1)	44	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
16	Relaciones de proporcionalidad (2)	46			
17	Relaciones de proporcionalidad (3)	48			
18	Relaciones de proporcionalidad (4)	50			
19	Relaciones de proporcionalidad (5)	52			
20	Relaciones de variación cuadrática (1)	54			Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
21	Relaciones de variación cuadrática (2)	56			
22	Probabilidad frecuencial	58		Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
23	Los eventos se pueden catalogar (1)	60			
24	Los eventos se pueden catalogar (2)	62			
25	Eventos independientes	64			
26	Las encuestas	66		Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.
27	Extracción de una muestra	68			
28	Estimación de totales y de porcentajes en una población	70			
Evaluación tipo Enlace		72			
Evaluación tipo PISA		74			

BLOQUE II		76			
Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
29	Traducir al álgebra y factorizar	78	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
30	La factorización, paso a paso	80			
31	La factorización aplicada	82			
32	Traslación de figuras	84	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
33	Rotación de figuras (1)	86			
34	Rotación de figuras (2)	88			
35	Dos transformaciones sucesivas	90			Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
36	Identificación de transformaciones	92			
37	Diseños que combinan varias transformaciones	94			
38	Cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo (1)	96		Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
39	Cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo (2)	98			
40	Explicitación del teorema de Pitágoras	100			Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
41	Uso del teorema de Pitágoras (1)	102			
42	Uso del teorema de Pitágoras (2)	104			
43	Uso del teorema de Pitágoras (3)	106			
44	Eventos mutuamente excluyentes	108	Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
45	Eventos complementarios	110			
Evaluación tipo Enlace		112			
Evaluación tipo PISA		114			

BLOQUE III		116			
Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
46	La fórmula general	118	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
47	Ecuación general de 2o. grado	120			
48	Completar el cuadrado	122			
49	Problemas sobre semejanza de figuras	124	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
50	Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos (1)	126			
51	Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos (2)	128			
52	Teorema de Tales	130			Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
53	Recíproco del teorema de Tales	132			
54	Aplicaciones del teorema de Tales	134			
55	Construcción de figuras homotéticas (1)	136			Aplicación de la semejanza en la construción de figuras homotéticas.
56	Construcción de figuras homotéticas (2)	138			
57	Construcción de figuras homotéticas (3)	140			
58	Propiedades de la homotecia	142			

Índice

Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
59	Proporcionalidad y funciones	144	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
60	La función $y = ax^2$ (1)	146			
61	La función $y = ax^2$ (2)	148			
62	La función $y = ax^2 + b$	150			
63	Gráficas rectas y curvas (1)	152			Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
64	Gráficas rectas y curvas (2)	154			
65	Eventos independientes (1)	156		Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).
66	Eventos independientes (2)	158			
67	Eventos independientes (3)	160			
Evaluación tipo Enlace		162			
Evaluación tipo PISA		164			

BLOQUE IV		166			
Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
68	Sucesiones, términos y patrones	168	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.
69	Sucesiones y diferencias	170			
70	Sucesiones de figuras y números con fórmula cuadrática	172			
71	Sólidos de revolución	174	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.
72	Construcción de desarrollos planos de cilindros y conos	176			
73	Pendiente de una recta (1)	178		Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
74	Pendiente de una recta (2)	180			
75	Pendiente de una recta (3)	182			
76	El cociente de los catetos de un triángulo rectángulo (1)	184			
77	El cociente de los catetos de un triángulo rectángulo (2)	186			Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
78	Relación entre los lados de un triángulo rectángulo	188			
79	Razones trigonométricas (1)	190			Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
80	Razones trigonométricas (2)	192			
81	Resolución de triángulos rectángulos	194			
82	Aplicación de las razones trigonométricas	196			
83	Razón de cambio (1)	198	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
84	Razón de cambio (2)	200			
85	Razón de cambio (3)	202			
86	Razón de cambio (4)	204			
87	Dispersión y rango	206	Manejo de la información	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.
88	Desviación media	208			
89	Diagramas de caja y bigotes	210			
Evaluación tipo Enlace		212			
Evaluación tipo PISA		214			

BLOQUE V		216			
Lección	Título	Pág.	Eje	Tema	Contenido
90	Distintos problemas, diferentes ecuaciones (1)	218	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.
91	Distintos problemas, diferentes ecuaciones (2)	220			
92	Ecuaciones y problemas	222			
93	Cortes a un cilindro y a un cono	224	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
94	Varios círculos en un cono	226			
95	Volumen de un cilindro	228			Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
96	Cálculo del volumen de un cono	230			
97	Volumen de cilindros y conos (1)	232			Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.
98	Volumen de cilindros y conos (2)	234			
99	Funciones lineales y cuadráticas en distintos contextos (1)	236	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
100	Funciones lineales y cuadráticas en distintos contextos (2)	238			
101	Juego justo (1)	240		Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.
102	Juego justo (2)	242			
103	Juego justo (3)	244			
Evaluación tipo Enlace		246			
Evaluación tipo PISA		248			
	Anexo 1. Plano de un icosaedro	250			
	Anexo 2. Tabla de razones trigonométricas	251			
	Anexo 3. Complemento tecnológico (1)	252			
	Anexo 4. Complemento tecnológico (2)	256			
	Bibliografía	258			

En esta fotografía de la Ciudad-Estado de Singapur se aprecian las construcciones de un paisaje urbano de inspiración geométrica que se conoce como una maravilla de la arquitectura moderna de Asia. Sobre un fondo de edificios como prismas rectos, aparece en primer plano una enorme circunferencia, especie de rueda de la fortuna, la *Singapore Flyer*, que es la noria-mirador más grande del mundo. Mide 165 metros de altura y desde ahí pueden observarse, en días despejados, hasta otros países vecinos, como Malasia e Indonesia. Singapur es una mezcla extraordinaria de culturas y tradiciones y una de las ciudades mejor organizadas del mundo.

BLOQUE I

Aprendizajes esperados:

- Explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Contenidos

- Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.
- Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.
- Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
- Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
- Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
- Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
- Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

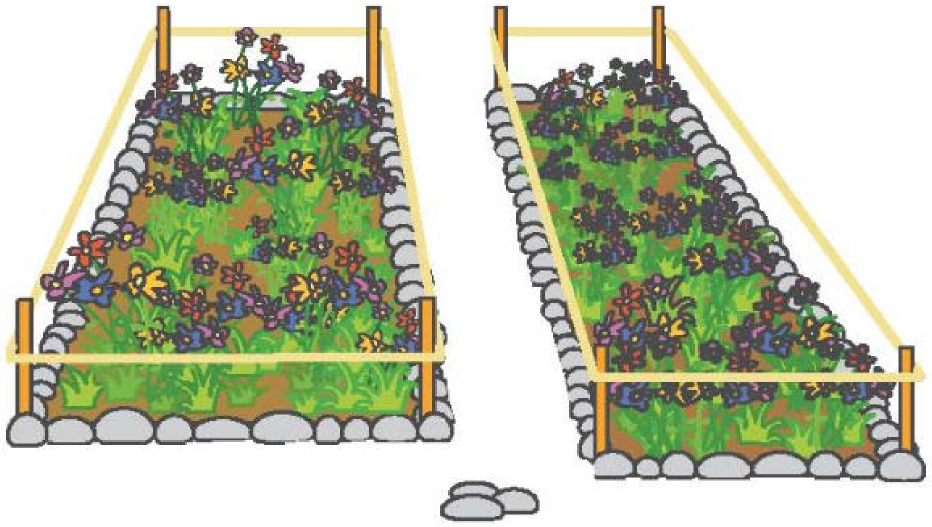
Rectángulos, perímetros y áreas (1)

Lados variables y perímetro fijo

En estas lecciones se examina la relación entre el perímetro y el área de un rectángulo, empezando con aritmética simple hasta llegar a la ecuación cuadrática que relaciona dimensiones lineales con medidas de área.

I. Luis y Manuel son los encargados de probar dos nuevos procedimientos de cultivo de flores. Cada uno debe marcar un terreno rectangular de manera que ambos terrenos sean fácilmente distinguibles. A cada quien se le entrega una cuerda de 24 m para cercar su terreno.

Luis hace rápidamente un cálculo mental y decide que su rectángulo tendrá 10 m de largo por 2 de ancho. Para que los terrenos sean diferentes, Manuel decide que su rectángulo será de 8 m de largo y 4 de ancho.



Luis afirma que en su terreno podrá sembrar más plantas, porque mide 10 m de largo y en cambio el de Manuel sólo mide 8 m de largo. ¿Tiene razón Luis? ______ ¿Por qué? ______________________________

____

En la siguiente cuadrícula, tomando un cuadrito como unidad, traza diferentes rectángulos que tengan 24 m de perímetro.

II. ¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 m trazaste? ______

a) Si se usan sólo números enteros para medir, ¿cuántos rectángulos diferentes con perímetro de 24 m se pueden trazar? ______

b) Además de números enteros, ahora usa fracciones de 0.5 m. ¿Cuántos rectángulos se pueden trazar con el mismo perímetro? ______

c) Compara tus respuestas con las de otros compañeros y discutan las diferencias.

III. Examinen la relación entre las posibles medidas de los lados de un rectángulo y la cantidad de rectángulos que se pueden trazar, cuando el perímetro es igual a 24 m. Completen la tabla de abajo o diseñen otra diferente. Esto demuestra que se puede llegar al mismo resultado por diferentes caminos.

Rectángulos	Sólo números enteros (largo × ancho)	Números enteros y fracciones de 0.5 m	Números enteros y fracciones de 0.25 m
1	11 × 1	11.5 × 0.5	
2	10 × 2	10.5 × 1.5	
3		9.5 × 2.5	
4			
5			
6			
Total	6	12	

Complemento tecnológico

Construcción de un rectángulo con perímetro fijo y lados variables, usando software de geometría dinámica, en este caso *GeoGebra*.

Anexo 3, página 252.

Rectángulos, perímetros y áreas (2)

Lados variables y área fija

De acuerdo a lo estudiado en la lección anterior, es posible trazar rectángulos que tengan el mismo perímetro aunque la longitud de sus lados sea diferente. Revisemos ahora el área de tales rectángulos.

I. Con base en tu experiencia, contesta la primera pregunta. En las demás podrás analizar casos específicos.

a) Si dos rectángulos tienen el mismo perímetro, ¿son iguales sus áreas? ______

Explica: ______________________________

____

b) Considera dos rectángulos diferentes, *R1* y *R2*, que tienen la misma área, por ejemplo, 28 m². ¿Cuánto pueden medir sus lados?

	R1	*R2*
Área	28 m²	28 m²
Largo		
Ancho		
Perímetro		

Reto

Si dos rectángulos tienen la misma área pero difieren en su perímetro, ¿qué relación hay entre sus lados correspondientes?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y aclaren diferencias.

c) En tu cuaderno, haz una tabla como la anterior y asigna un valor mayor al área de los rectángulos.

II. Completen la siguiente tabla considerando sólo números enteros.

Área del rectángulo	Largo	Ancho	Perímetro	Respuestas correctas
27 m²				
36 m²				
42 m²				
63 m²				

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

¿Hay respuestas distintas para la misma área? ______

En la última columna anoten el número de posibles respuestas correctas para cada rectángulo.

III. Completa la siguiente tabla considerando sólo números enteros.

Área del rectángulo	Perímetro	Largo	Ancho
18 m²	18		
32 m²	24		
56 m²	36		
75 m²	40		
112 m²	44		

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y aclaren discrepancias.

IV. Describan el método que usaron para encontrar la longitud de los lados de cada rectángulo en la actividad **III**. Escriban el que les parezca mejor y expónganlo a todo el grupo.

V. Analicen la forma en que se resuelve el siguiente problema: dado un rectángulo con área = 48 m² y perímetro = 32 m, encontrar las medidas de sus lados.

Si el lado largo del rectángulo mide x, entonces el ancho mide $16 - x$, ¿por qué?

____

Por otra parte, tenemos que

$$x(16 - x) = 48$$

es decir,

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

llegamos a una expresión algebraica cuya variable está elevada al cuadrado, como mayor exponente, por lo cual se denomina **ecuación cuadrática** o también **ecuación de segundo grado**.

VI. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son cuadráticas? Márcalas con una ✓.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ b) $3x^2 + 5x = 3x^2 + 20$ c) $(x - 4)^2 - 4 = 5$

d) $x^2 - 7 = 0$ e) $2x - 3 = x + 4$

La **forma general** de una ecuación cuadrática en x es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la que a, b y c son números reales; a es el coeficiente de x^2, b es el coeficiente de x, c es el término independiente y a es diferente de cero, por supuesto (por qué?).

Así que en la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

los valores son $a = 1, b = -2, \text{y } c = -8$

Lee en voz alta los valores de a, b y c en las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 5x + 8 = 0$ b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $2x^2 + 14x + 20 = 0$ d) $3x^2 - 9x - 30 = 0$

Ecuaciones cuadráticas (1)

Algunos problemas y sus ecuaciones

Después de estudiar y resolver esta lección te familiarizarás con algunos tipos de ecuaciones cuadráticas.

I. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son verdaderas cuando $x = -5$ o $x = 10$?

a) $x^2 - 25 = 0$
b) $x^2 - 5x - 50 = 0$
c) $x^2 - 5x - 50 = 0$

El número que al sustituirse en la variable de la ecuación hace a ésta verdadera se llama una **solución**, o **raíz** de dicha ecuación.

Es fácil comprobar que -5 es una solución de $x^2 - 25 = 0$, pero no de $x^2 - 5x - 50 = 0$.
10 es una solución de $x^2 - 5x - 50 = 0$, pero no de $x^2 - 25 = 0$.
Por otra parte, -5 y 10 son soluciones de $x^2 - 5x - 50 = 0$.

Compruébalo en tu cuaderno.

¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación lineal o de primer grado? ______
¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación cuadrática o de segundo grado? ______

II. Completen la siguiente tabla con la expresión algebraica que describe la relación de los lados y el área de los siguientes rectángulos, así como la ecuación resultante.

a) El largo del rectángulo *R1* mide 4 metros más que el ancho y su área es de 77 m².
b) El largo del rectángulo *R2* mide 7 metros más que el ancho y el área mide 60 m².
c) El largo del rectángulo *R3* mide 4 veces el ancho y su área es de 144 m².
d) El ancho del rectángulo *R4* es la tercera parte del largo y el área mide 27 m².

Rectángulo	Ancho	Largo	Expresión algebraica para el área	Ecuación cuadrática
R1	x			
R2		$x + 7$		
R3			$x(4x) = 144$	
R4				$\frac{x^2}{3} = 27$

Comparen los datos de su tabla con los de otras parejas de compañeros y discutan las diferencias para corregir posibles errores.

Las ecuaciones de segundo grado sirven para expresar y resolver un sinnúmero de problemas que surgen en una diversidad de situaciones. Es muy importante que la ecuación correspondiente esté bien planteada, es decir, que describa correctamente la situación de que se trate.

III. En cada uno de los siguientes problemas, escribe la ecuación que lo representa correctamente.

a) El área de un terreno cuadrado mide 144 m².
¿Cuál es la medida de cada lado? ______
¿Cuánto mide el perímetro? ______ Ecuación: ______

b) Tengo x número de bolsas y cada bolsa contiene un número x de canicas. Si regalo 125 canicas, me quedarán 500.
Ecuación: ______

c) El área de un terreno rectangular mide 108 m² y su lado largo mide tres veces lo que mide el ancho. ______

d) Si al cuadrado de un número le sumo 15, obtengo 64. ______

e) El cuadrado de un número menos siete veces ese número, más 12, es igual a cero. ______

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y analicen discrepancias.

IV. Existen varios métodos para encontrar la solución o soluciones de una ecuación cuadrática. Para empezar, se puede usar el tanteo, ya sea con cálculo mental, con papel y lápiz o con calculadora. Por ejemplo, para encontrar la solución al problema del rectángulo con área de 77 m² (actividad **II**, inciso **a**) y cuyo largo mide cuatro metros más que el ancho, se puede construir una tabla como esta.

x	$x + 4$	x^2	$4x$	$x^2 + 4x$
2	6	4	8	12
3	7	9	12	21

a) Continúen la tabla anterior asignando valores a x hasta que encuentren el que hace $x^2 + 4x$ igual a 77.

b) Repitan la tabla en su cuaderno y asignen valores negativos a x, hasta que encuentren uno que haga $x^2 + 4x$ igual a 77.

V. Habrás notado que hay casos en que $b = 0$ en la forma general de una ecuación cuadrática. En tu cuaderno, con el método que prefieras, resuelve las siguientes ecuaciones y compara tus respuestas con tus compañeros, para que corrijan errores.

a) $4x^2 = 400$
b) $3x^2 = 147$
c) $x^2 + 13 = 38$
d) $x^2 - 12 = 52$
e) $x^2 + 5x = 36$
f) $5x^2 - 3x - 162 = 0$
g) $x^2 + 3x - 5 = x + 10$

Ecuaciones cuadráticas (2)

Una clase específica y muy sencilla

En la lección anterior resolviste ecuaciones de segundo grado en las que $b = 0$.

El procedimiento empleado se redujo a obtener la raíz cuadrada de un número. No hay que olvidar que la raíz cuadrada de un número tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; por esa razón, se acostumbra denotar a las soluciones como x_1 y x_2, o bien $x = \pm r$, donde r es la respuesta. También, como se vio en la actividad **I** de la lección anterior, aunque generalmente las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, algunas sólo tienen una y otras, ninguna, como $x^2 + 1 = 0$.

I. A la derecha de cada una de las ecuaciones que siguen escribe otra equivalente, que tenga la forma $x^2 = n$, donde n es un número; y enseguida de la ecuación simplificada escribe sus soluciones, x_1 y x_2.

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $4x^2 = 400$

c) $3x^2 = 147$

d) $x^2 + 13 = 38$

e) $x^2 - 12 = 52$

Reto

Inventa una ecuación que sólo tenga una solución doble, otra que tenga dos y otra que no tenga solución.

II. Transformen las siguientes ecuaciones a la forma $x^2 = n$, y resuélvanlas, simplificando al máximo las respuestas. En cada caso, comprueben la solución sustituyéndola en la ecuación original.

a) $2x^2 - 40 = 0$

b) $5x^2 - 45 = 0$

c) $3x^2 + 7 = 43$

d) $3x^2 - 6 = 18$

e) $4x^2 + 3 = 6$

Otra forma en la que puede presentarse una ecuación de segundo grado es la que sigue.

$$(x + 5)^2 - 18 = 0$$

y en tal caso, se puede transformar a

$$(x + 5)^2 = 18$$

y luego:

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \pm \sqrt{18}$$

____

$$x = -5 \pm \sqrt{18}$$

Finalmente,

x_1 = __________

x_2 = __________

III. En su cuaderno, resuelvan las siguientes ecuaciones.

a) $(x + 3)^2 = 25$

b) $(x + 7)^2 - 4 = 45$

c) $(x - 4)^2 + 3 = 18$

d) $(x - 5)^2 + x - 8 = x + 19$

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros, fíjense si hay diferencias y, con la ayuda de su profesor, discutan los procedimientos que usaron y aclaren cuáles son las respuestas correctas.

IV. Utilicen cálculo mental o construyan tablas para resolver lo que sigue.

a) Encuentren dos números que sumados den 5 y multiplicados den 6.

______ y ______

b) La suma de dos números es 10 y su producto es 16. ¿Qué números son?

______ y ______

c) La suma de dos números es 16 y su producto es 63. ¿Qué números son?

______ y ______

d) Encuentren dos números que sumados den –5 y multiplicados den –6.

______ y ______

e) Encuentren dos números que sumados den –7 y multiplicados den 10.

______ y ______

f) La suma de dos números es –12 y su producto es 35. ¿Qué números son?

______ y ______

g) La suma de dos números es –1 y su producto es –42. ¿Qué números son?

______ y ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y analicen cuáles son las correctas.

Figuras congruentes

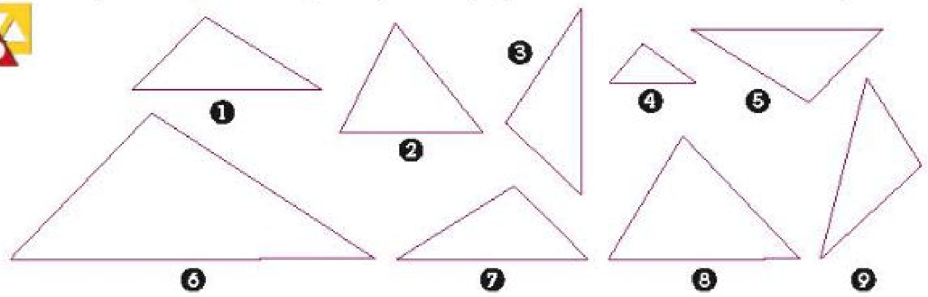
Identificación de figuras congruentes

I. El concepto de congruencia juega un papel importante en nuestra vida diaria, por ejemplo, cuando vamos a la tienda y pedimos "un vaso de licuadora igual a éste" o en la ferretería cuando solicitamos "una tuerca igual a ésta". Muchos de los juegos de bloques para armar que usan los niños pequeños tienen la misma forma y el mismo tamaño. En todos estos ejemplos está presente la noción que en matemáticas llamamos **congruencia**, que significa misma forma y tamaño.

a) Identifiquen en su salón de clases o en la escuela objetos o figuras congruentes.

b) Compartan con los demás compañeros lo que encontraron.

II. Marquen con ✓ los triángulos que al superponerse coincidan en todas sus partes.

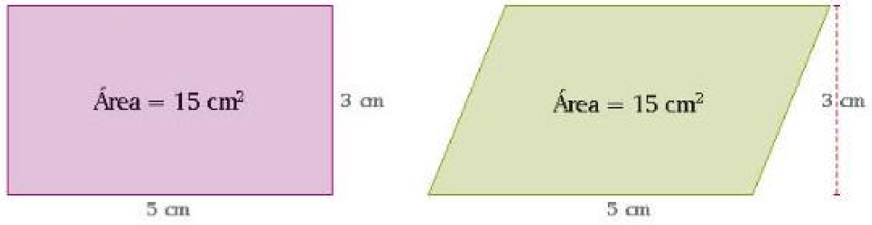


a) Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros. Si tienen diferencias, midan los lados y los ángulos de los triángulos, hasta que todos estén de acuerdo.

b) ¿Qué números tienen los triángulos anteriores que son congruentes? ____________

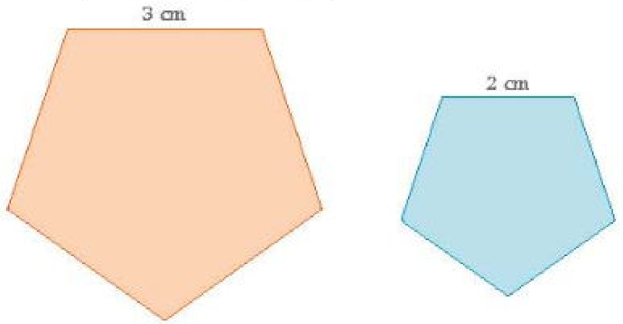
> Dos figuras que al superponerse coinciden en todas sus partes se llaman **congruentes**. En el caso de dos triángulos, son congruentes si sus lados y ángulos correspondientes son iguales.

III. Consideren los siguientes cuadriláteros:



Escriban por qué estos cuadriláteros no son congruentes, a pesar de que tienen el mismo largo y ancho. ____________

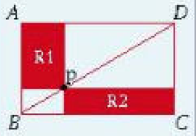
IV. Consideren los siguientes pentágonos regulares:



Escriban por qué estos polígonos no son congruentes, a pesar de que tienen sus ángulos iguales. ____________

Reto

P es un punto que se mueve sobre la diagonal *BD* del rectángulo *ABCD*. ¿Cómo son las áreas de los rectángulos R1 y R2?

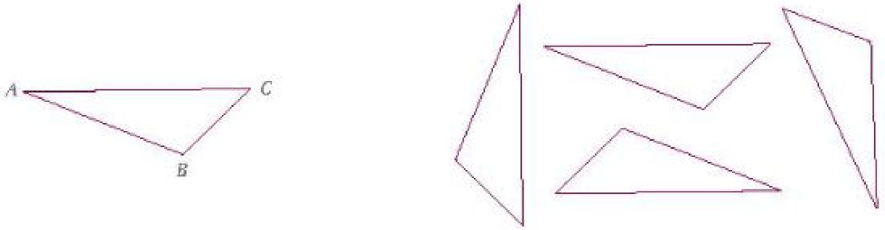


V. En las siguientes figuras, los cuatro triángulos de la derecha son congruentes con el triángulo *ABC*.

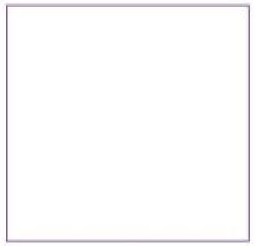
a) Nombren con *A'*, *B'*, *C'* los vértices correspondientes.

b) Marquen con uno, dos o tres arcos los ángulos correspondientes.

c) Con una, dos o tres rayas marquen los lados correspondientes.



VI. En el siguiente cuadrado:



a) Tracen dos segmentos de recta que lo dividan en cuatro cuadriláteros congruentes, con la condición de que no sean paralelogramos (los cuadrados y los rectángulos son paralelogramos).

b) Cuando encuentren la solución compárenla con otras parejas de compañeros.

c) Propongan un problema parecido para el caso de un rectángulo. ____________

____

____

VII. En tu casa haz lo siguiente:

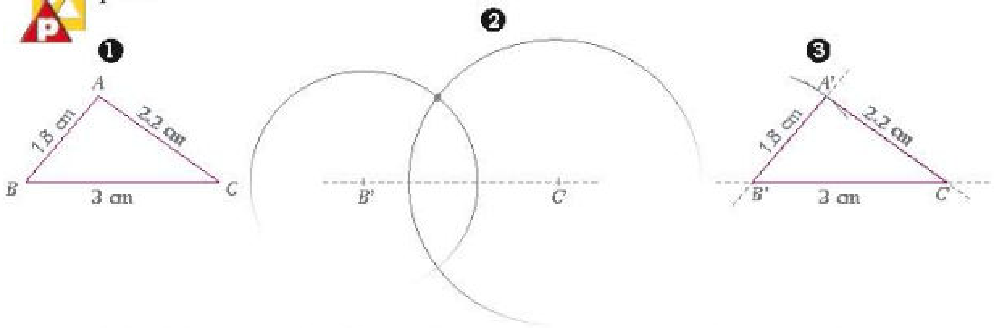
a) Coloca tu zapato izquierdo frente a un espejo. La imagen mediante esta reflexión es exactamente la misma que tu zapato derecho. Sin embargo, no te puedes poner tu zapato izquierdo en tu pie derecho, y a la inversa. Comenta esto en el grupo en términos de lo que has aprendido en esta lección.

LECCIÓN 6

Construcción de triángulos congruentes (1)

Procedimientos para trazar triángulos congruentes

I. Para trazar un triángulo congruente con el triángulo ABC se siguen los siguientes pasos:



a) Cada integrante de la pareja analice estos trazos y luego explique al otro compañero la manera como se copió el triángulo ABC.

b) En una hoja de su cuaderno cada uno de los miembros de la pareja trace:

- un triángulo equilátero
- un triángulo isósceles
- un triángulo escaleno

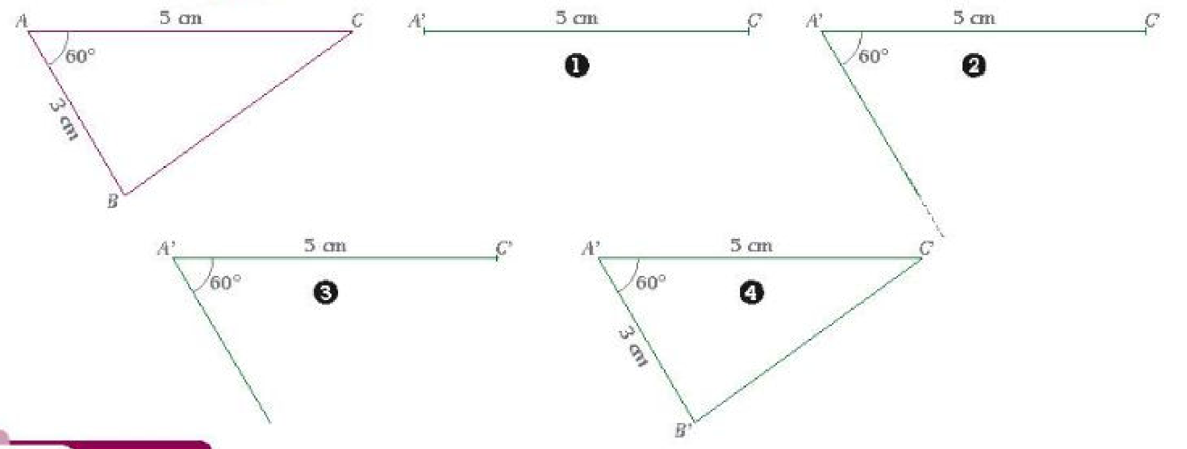
c) Midan los tres lados de cada triángulo y proporcionen estas medidas a su compañero.

d) Usen el procedimiento mostrado arriba para que cada uno trace triángulos congruentes con los triángulos trazados por el otro.

e) Recorten cada triángulo y superpónganlo en el original para verificar que efectivamente son congruentes.

f) Describan este procedimiento en su cuaderno e ilústrenlo con un ejemplo.

II. Otro procedimiento para trazar un triángulo congruente a un $\triangle ABC$, es el siguiente:



a) Cada integrante de la pareja explique al otro compañero cómo trazar un triángulo congruente a otro, conociendo dos lados y el ángulo que forman estos dos lados.

b) En una hoja aparte cada quien trace:

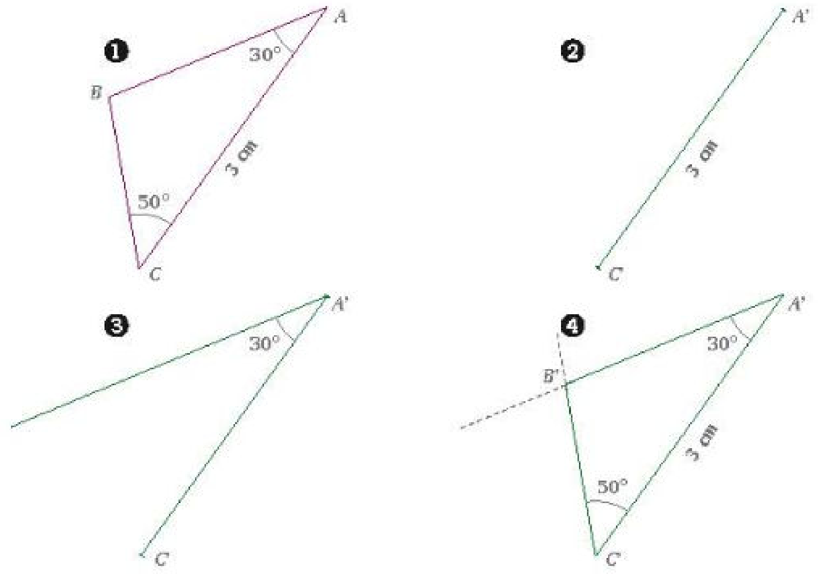
- un triángulo obtusángulo
- un triángulo rectángulo
- un triángulo acutángulo

c) Midan dos lados de cada triángulo y el ángulo que forman y proporcionen estas medidas a su compañero para que trace un triángulo congruente con cada uno.

d) Marquen los lados y ángulos correspondientes en cada caso y verifiquen sus resultados, superponiendo cada triángulo sobre el original.

e) Describan en su cuaderno este procedimiento, acompañado de un ejemplo.

III. Un procedimiento más para trazar un triángulo congruente a un $\triangle ABC$ es el siguiente



a) Cada miembro de la pareja explique a su compañero cómo trazar un triángulo congruente a otro, si se dan como información un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

b) En una hoja de su cuaderno cada integrante trace tres triángulos:

- uno equilátero y acutángulo
- otro isósceles y rectángulo
- uno más escaleno y acutángulo

c) En los tres triángulos, cada uno mida un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

d) Entreguen esta información a su compañero para que trace un triángulo congruente con cada uno.

e) Marquen los lados y ángulos correspondientes y verifiquen sus resultados superponiendo cada triángulo sobre el original.

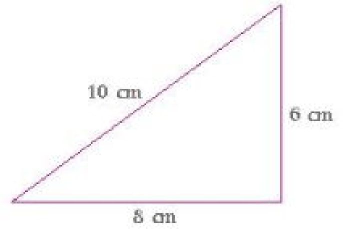
f) Describan este procedimiento en su cuaderno e ilústrenlo con un ejemplo.

Construcción de triángulos congruentes (2)

Datos mínimos que se requieren para trazar triángulos congruentes

En cada una de las actividades de esta lección, consideren que una persona les dicta a todos los alumnos del grupo algunos datos con los que deben trazar un triángulo en su cuaderno con sus instrumentos de geometría.

I. Tracen un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm.



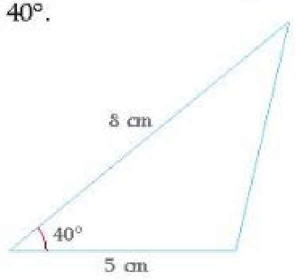
a) ¿Cuáles son las medidas de cada uno de sus ángulos? ____________

b) Comparen su triángulo con otras parejas. ¿Todos los triángulos que trazaron son congruentes? ______

c) ¿Son necesarios más datos para que todos los triángulos que trazaron sean congruentes? ______ . Justifiquen su respuesta. ____________

d) Con ayuda de su maestro redacten una conclusión de esta actividad.

II. Tracen un triángulo en el que un lado mida 8 cm y el otro 5 cm de manera que el ángulo que forman sea de 40°.

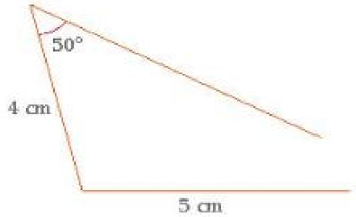


a) ¿Cuánto mide el tercer lado del triángulo? ____________

b) ¿Hacen falta más datos para que los triángulos que trazaron sean congruentes? ______. Justifiquen su respuesta. ____________

c) Con ayuda de su maestro escriban una conclusión de esta actividad.

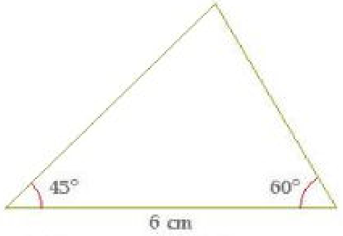
III. Tracen un triángulo en el que dos de sus lados midan 5 cm y 4 cm, y un ángulo de 50°, que no esté formado por estos lados.



a) Comenten entre todo el grupo los resultados que obtuvieron.

b) ¿Qué conclusión obtienen de esta actividad? ____________

IV. Tracen un triángulo en el que un lado mida 6 cm y los ángulos adyacentes a ese lado midan 45° y 60°.

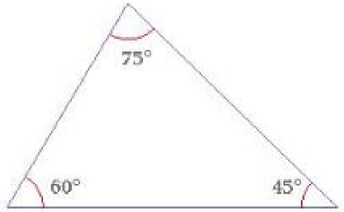


a) ¿Cuáles son las medidas de los otros dos lados? ____________

b) Comparen su triángulo con el de otras parejas. ¿Los triángulos que trazaron son congruentes? ______

c) Escriban una conclusión que considere los resultados de los alumnos del grupo.

V. Tracen un triángulo cuyos ángulos midan 45°, 60° y 75°, respectivamente.



a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo que trazaron? ________

b) ¿Resultaron congruentes los triángulos que trazaron? ______

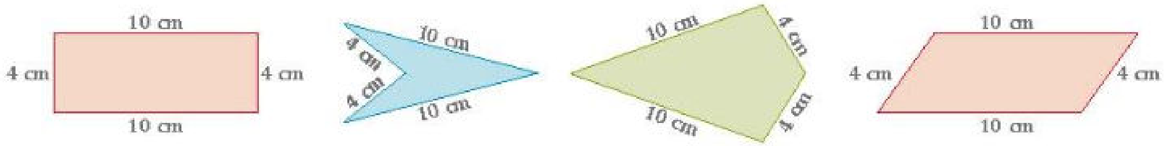
c) Con apoyo de su maestro redacten una conclusión de esta actividad. ________

VI. Entre todo el grupo, y con apoyo de su maestro, escriban en su cuaderno un resumen sobre los resultados de esta lección que establezca los datos mínimos necesarios para trazar un triángulo congruente a otro triángulo dado.

Construcción de rectángulos y cuadrados

Datos que se requieren para trazar rectángulos y cuadrados congruentes

I. Para una tarea escolar, dos amigos requieren trazar un rectángulo cuyos lados midan 4 cm, 10 cm, 4 cm y 10 cm, respectivamente, aunque la indicación que le da uno al otro es: "traza un cuadrilátero de lados 4 cm, 10 cm, 4 cm y 10 cm". El amigo traza sucesivamente las cuatro figuras siguientes:



a) ¿Son cuadriláteros las cuatro figuras? ____ ¿Cómo definen un cuadrilátero?

b) Tracen en su cuaderno el rectángulo que debió haber trazado el amigo. ¿Todos los rectángulos que trazaron son congruentes? ____ ¿Queda definido de manera única un rectángulo si sólo se dan las medidas de sus lados? ________ Argumenten su respuesta.

II. Tracen en su cuaderno un rectángulo cuyas diagonales midan 6 cm.

a) ¿Todos los rectángulos resultaron congruentes? ________

b) ¿Qué dato adicional se requiere para que todos los rectángulos sean congruentes? ________

c) Agreguen ese dato y vuelvan a trazar el rectángulo. ¿Todos los rectángulos resultaron congruentes? ______

d) ¿Qué conclusión obtienen de a), b) y c)? ________

III. Para trazar un cuadrado congruente con otro, ¿qué datos son suficientes?

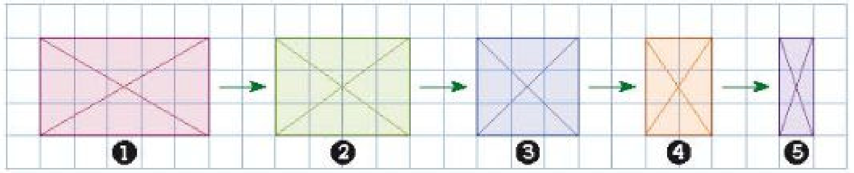
a) Tracen en su cuaderno un cuadrado cuyos lados midan 5 cm.
¿Todos los cuadrados resultaron congruentes? ________

b) Tracen en su cuaderno un cuadrado cuyas diagonales midan 6 cm.
¿Todos los cuadrados resultaron congruentes? ________

c) ¿Será necesario dar como dato el ángulo que forman las diagonales entre sí? ________. Justifiquen su respuesta, ilustrándola con un ejemplo.

e) ¿Qué conclusiones obtienen de a), b) y c)? ________

IV. Consideren que la siguiente sucesión de figuras es una selección de imágenes de una película, en la que el rectángulo va reduciendo su largo. Analicen lo que ocurre con los *lados*, *ángulos*, *diagonales* y *ejes de simetría* de cada figura, en particular en la figura ❸ y coméntenlo con otra pareja de compañeros.



a) ¿Qué diferencia hay entre las propiedades de las diagonales de la figura ❸ con las diagonales de las otras figuras? ________

b) ¿Qué diferencia hay entre las propiedades de los ejes de simetría de la figura ❸ con los ejes de simetría de las otras figuras? ________

c) ¿Cómo definen un rectángulo? ________

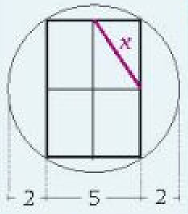
d) Un cuadrado tiene todas las propiedades de un rectángulo (y algunas más). ¿Puede considerarse a un cuadrado como un caso particular de rectángulo? Es decir, ¿un cuadrado es también un rectángulo? ______.

V. En la siguiente tabla, marquen la celda con ✓ si la propiedad corresponde a la figura geométrica indicada.

Propiedades	Rectángulo	Cuadrado
Tiene dos pares de lados paralelos		
Sus lados opuestos son iguales		
Sus cuatro lados son iguales		
Tiene cuatro ángulos rectos		
Sus diagonales son iguales		
Sus diagonales son perpendiculares una a la otra		
Sus diagonales se bisecan una a la otra		
Sus diagonales bisecan sus ángulos interiores		
Tiene sólo dos ejes de simetría		
Tiene cuatro ejes de simetría		

Reto

En la siguiente figura encuentra la longitud de x.



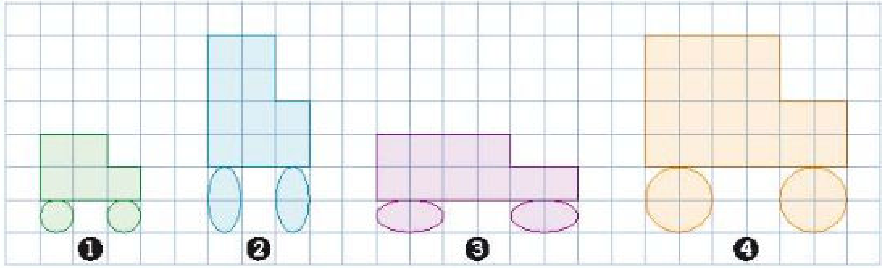
VI. Comparen sus respuestas de esta lección con otras parejas de compañeros. ¿Coinciden? Si no coinciden, analicen las causas y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 9

Construcción de figuras semejantes (1)

Relación entre los ángulos y los lados correspondientes de figuras semejantes

I. Las figuras ❷, ❸ y ❹ se trazaron a partir de la ❶.



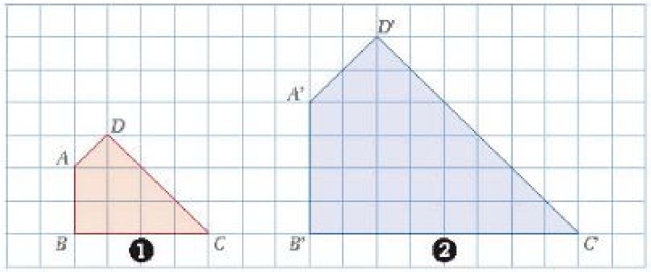
a) ¿Qué cambios tuvo la figura ❶ al transformarse en las figuras ❷, ❸ y ❹? ____________________

b) Las figuras ❶ y ❹ son **semejantes**. ¿Qué características tienen las figuras semejantes? ____________________

c) Conforme a la respuesta anterior, ¿por qué las figuras ❶ y ❷ **no** son semejantes? ____________________

d) De las figuras anteriores, ¿qué otros pares de figuras **no** son semejantes? ____________________. Expliquen su respuesta. ____________________

II. En las siguientes figuras, los cuadriláteros ❶ y ❷ son semejantes.



a) ¿Qué relación hay entre cada par de ángulos correspondientes de ambos cuadriláteros? (anoten todas estas relaciones y comparen sus respuestas).

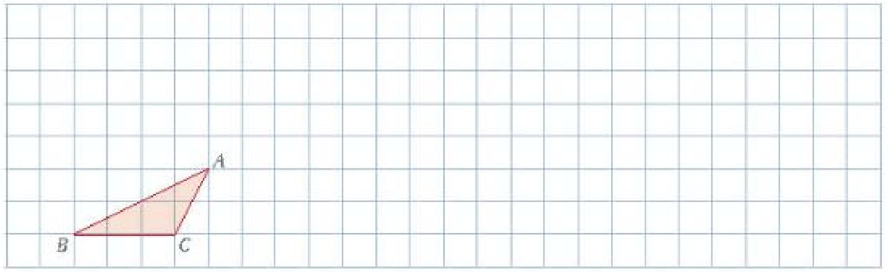
________ ; ________ ; ________ ; ________

b) ¿Qué relación hay entre cada lado del cuadrilátero $A'B'C'D'$ y el lado correspondiente del cuadrilátero $ABCD$? (anoten las relaciones faltantes).

$\frac{A'B'}{AB} = 2$; ______ = ; ______ = ; ______ =

La relación 2 a 1 que hay entre los lados del cuadrilátero ❷ respecto de los correspondientes del cuadrilátero ❶ se llama **factor de escala o razón de semejanza**. Esta razón de semejanza es una relación de **proporcionalidad** y su valor numérico se llama **constante de proporcionalidad**.

III. En la siguiente cuadrícula agranda tres veces el $\triangle ABC$ para obtener el $\triangle DEF$.



a) ¿Cuántas veces es mayor la base del $\triangle DEF$ que la del $\triangle ABC$? ________

Es decir, $\frac{EF}{BC} =$ ________

De la misma manera:

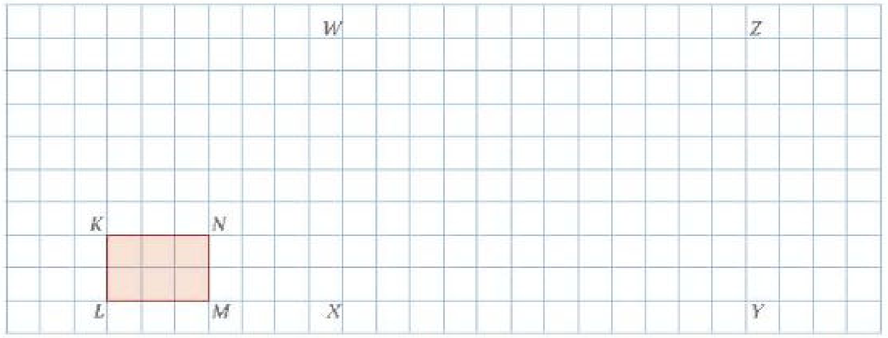
$\frac{DF}{AC} =$ ________ ; $\frac{DE}{AB} =$ ________

Por lo tanto, ¿cómo son el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$? ____________________

En este caso, ¿cuál es el factor de escala o razón de semejanza? ____________

En las **figuras semejantes** las razones de los lados correspondientes son iguales y los ángulos correspondientes también son iguales.

IV. Consideren el rectángulo $KLMN$ y el rectángulo $WXYZ$:



a) ¿Cómo verifican que el rectángulo $KLMN$ y el rectángulo $WXYZ$ son semejantes? ____________________

b) ¿Cuál es el factor de escala de los lados del rectángulo $WXYZ$ respecto de los lados del rectángulo $KLMN$? ____________________

c) Escriban las razones entre los lados del rectángulo $WXYZ$ y los del rectángulo $KLMN$. ____________________

d) En su cuaderno tracen otro rectángulo semejante al rectángulo $KLMN$.

e) ¿Ese rectángulo es también semejante a $WXYZ$? ________ ¿Cómo pueden comprobarlo? ____________________

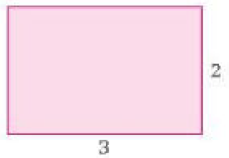
V. Comparen sus respuestas de todas las actividades de esta lección con las de otras parejas de compañeros. Si hay diferencias analicen por qué y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 10

Construcción de figuras semejantes (2)

Cómo construir rectángulos semejantes

I. Consideren el siguiente rectángulo.



a) En hojas cuadriculadas, tracen rectángulos semejantes a este, de manera que tengan 2, 3, 4 y 5 como factor de escala.

b) ¿Qué operación hicieron con las medidas del rectángulo original para determinar las medidas de los rectángulos semejantes? ______

c) Si en lugar de multiplicar por determinado número la medida de cada lado del rectángulo original la dividen, por ejemplo, entre 2, ¿obtienen un rectángulo semejante? ______. Justifiquen su respuesta. ______

d) Escriban una conclusión sobre **b)** y **c)**. ______

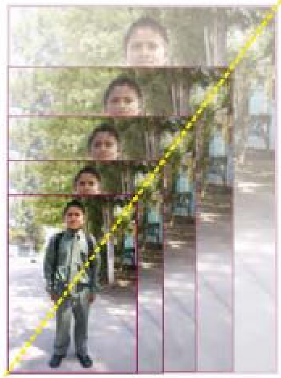
II. Gina dice que todos los cuadrados son semejantes. ¿Será verdad lo que afirma?

a) Para verificarlo o refutarlo, analicen varios casos. Por ejemplo, si los lados de un cuadrado miden 10 cm y de otro miden 7 cm, ¿son semejantes?

b) Consideren el caso de los rombos. ¿Son todos semejantes? ______ (Sugerencia: tracen varios rombos y observen sus ángulos). Argumenten su respuesta.

Bajo la coordinación de su maestro expongan ante todo el grupo su conclusión sobre semejanza de cuadrados y rombos.

III. Un diseñador gráfico afirma que una manera de ampliar y reducir fotografías rectangulares, sin que se distorsionen, es la que se muestra en esta imagen:



a) ¿Tiene razón el diseñador? ______

b) Hagan pruebas de este método en su cuaderno, comenten en parejas sus resultados y luego, entre todo el grupo, lleguen a una conclusión única.

c) Si concluyeron que el diseñador tiene razón, escriban en su cuaderno las instrucciones de su método para construir rectángulos semejantes.

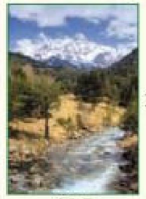
Glosario

Distorsionar

Se dice que una imagen sufre una distorsión si se deforma, es decir, si sus medidas no son proporcionales a las de la imagen original.

IV. Al tamaño de una fotografía de 10.5 cm por 15 cm se le llama *tamaño postal*.

a) Marquen con ✓ en el recuadro si la ampliación o reducción de esta fotografía no tuvo distorsión.

Postal	Ancho x largo					
	21 x 30	5.25 x 7.5	21 x 7.5	4.6 x 6	15.75 x 22.5	12 x 8
 15 10.5						

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros. Si no coinciden analicen las razones y, en su caso, corrijan lo necesario.

V. En muchas máquinas fotocopiadoras se pueden hacer ampliaciones o reducciones del documento original. Escriban en los espacios cuál es el factor de escala si un documento se fotocopia al:

a) 200% ______ **d)** 75% ______

b) 50% ______ **e)** 25% ______

c) 100% ______ **f)** 300% ______

d) Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si hay diferencias corrijan lo necesario.

VI. Investiguen las medidas de una cancha de básquetbol y trácenla en su cuaderno, de manera que sea un dibujo a escala de la cancha.

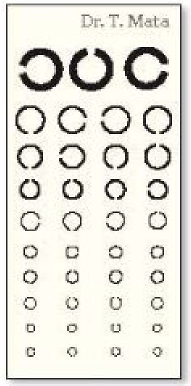
a) ¿Cuánto miden el largo y ancho de la cancha? ______

b) ¿Qué factor de escala eligieron para hacer su trazo? ______

c) ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho de la cancha en su trazo? ______

d) Compartan sus trazos con el resto del grupo y expliquen los criterios que usaron para hacerlos.

VII. La ilustración de la derecha contiene figuras semejantes entre sí. Los médicos oftalmólogos usan una ampliación de ésta para medir la agudeza visual de las personas.



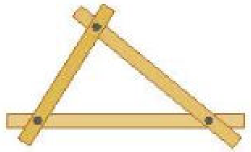
Encuentra en tu entorno otros ejemplos de figuras semejantes.

LECCIÓN 11

Criterios de congruencia de triángulos

Establecimiento de tres criterios de congruencia de triángulos

En las lecciones 6 y 7 analizamos cómo construir un triángulo congruente a otro, dando el mínimo de datos. En esta lección explicitaremos los criterios de congruencia de triángulos.



I. Coloquen sobre una mesa tres lápices, de manera que coincidan sus extremos para formar un triángulo. Intercambien de lugar los lápices varias veces, siempre formando un triángulo.

a) ¿Cuántos triángulos *diferentes* pudieron formar? ______

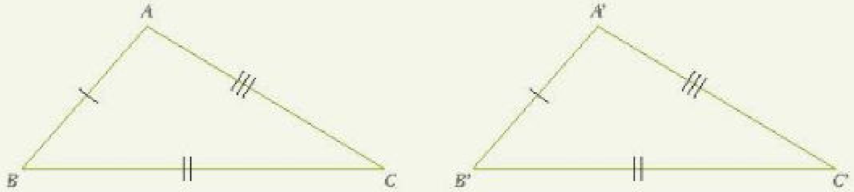
b) Pregunten a otras parejas de compañeros si todos los triángulos que formaron son congruentes entres sí.

c) ¿Qué relación tiene este resultado con el hecho de que un triángulo como el de la izquierda no se pueda deformar? ______

d) Comenten sus respuestas con las de otras parejas de compañeros y obtengan una conclusión.

El resultado anterior nos conduce al siguiente criterio de congruencia de triángulos:

Criterio LADO-LADO-LADO (LLL)
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes.



En símbolos (completen):

Si $AB =$ ______, $BC =$ ______ y $AC =$ ______, entonces $\triangle ABC \equiv \triangle$ ______

II. Para esta actividad requieren de un pedazo de alambre formando una horquilla como la ilustrada a la izquierda.

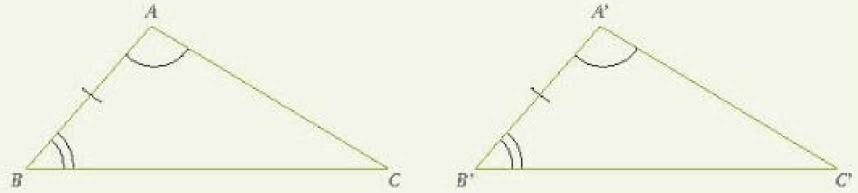
Consideren que los dos ángulos que se forman son adyacentes a la base de un triángulo.

a) Prolonguen con una línea punteada los lados desconocidos del triángulo.

b) Comenten con otras parejas cuántos triángulos diferentes pudieron formar.

Esta actividad nos lleva al segundo criterio de congruencia de triángulos:

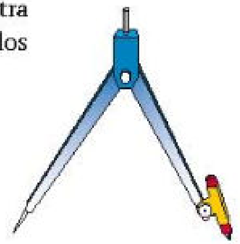
Criterio ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA)
Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



En símbolos (completen):

Si $\measuredangle A = \measuredangle$ ____, $\measuredangle B = \measuredangle$ ____ y $AB =$ ____, entonces $\triangle ABC \equiv \triangle$ ______

III. Para esta actividad fijen en su compás una determinada abertura, como se ilustra en la figura de la derecha. Consideren que los brazos del compás son dos lados de un triángulo y el ángulo que determinan es el que forman esos lados.

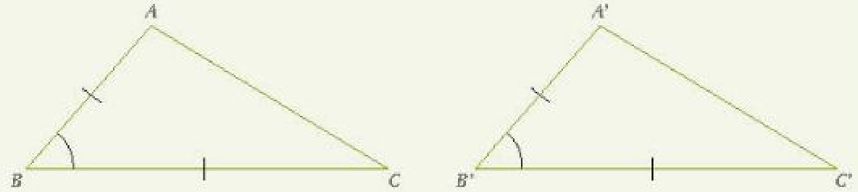


a) ¿El tercer lado del triángulo y los dos ángulos desconocidos quedan determinados de manera única? ______

b) Comenten sus respuestas con otros compañeros y obtengan una conclusión.

Esta actividad nos conduce al tercer criterio de congruencia de triángulos:

Criterio LADO-ÁNGULO-LADO (LAL)
Si dos lados de un triángulo y el ángulo que forman son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo que forman de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



En símbolos (completen):

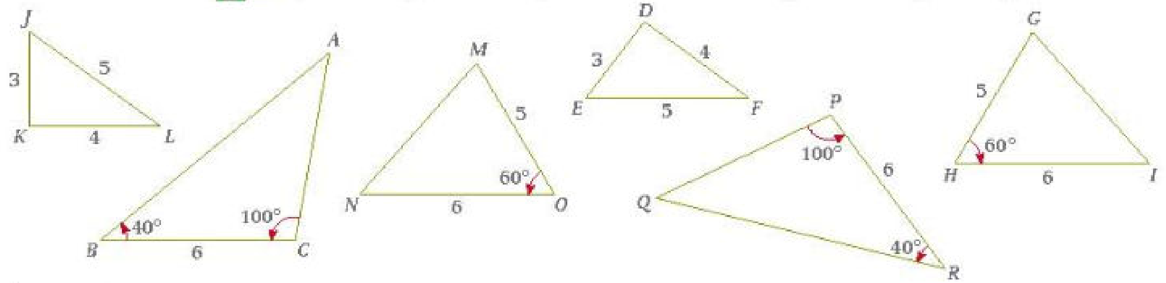
Si $AB =$ ____, $BC =$ ____ y $\measuredangle B = \measuredangle$ ____, entonces $\triangle ABC \equiv \triangle$ ______

IV. Redacten en su cuaderno un resumen de los tres criterios de congruencia analizados en esta lección. Coméntenlos con otras parejas del grupo y con ayuda de su maestro acuerden una redacción común.

Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos

Identificación y uso de los criterios de congruencia de triángulos

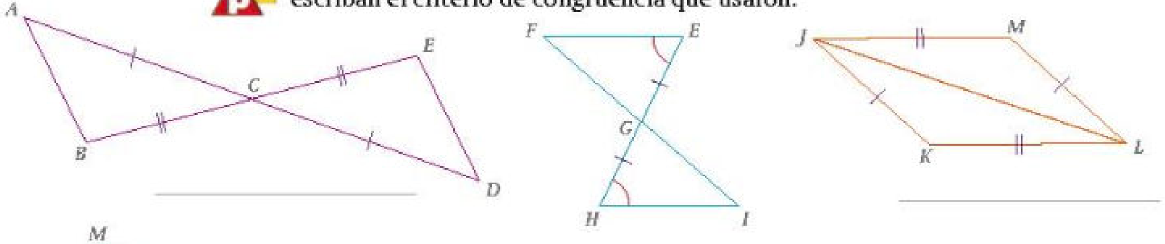
I. De las siguientes figuras, identifica pares de triángulos congruentes y relaciónalos usando el símbolo ≡. En cada caso, anota el criterio de congruencia de triángulos que usaste para decidir y anota los lados correspondientes que son iguales.



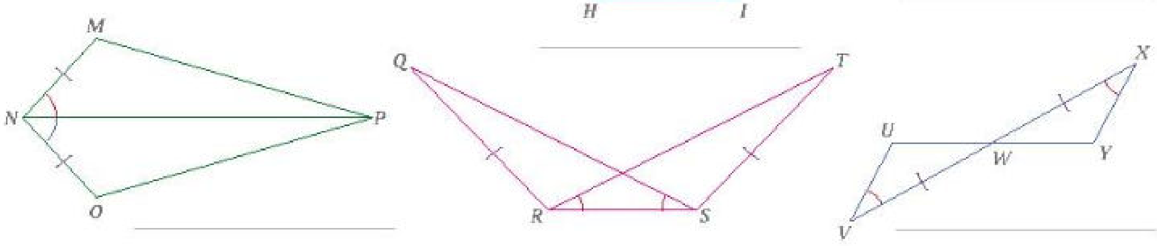
$\triangle ABC \equiv$ ________ ________ ________

$AB =$ ____ $BC =$ ____ $AC =$ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

II. En cada una de las siguientes figuras están marcados los lados y ángulos iguales. Identifiquen pares de triángulos congruentes, relaciónenlos con el símbolo ≡ y escriban el criterio de congruencia que usaron.



________ ________ ________

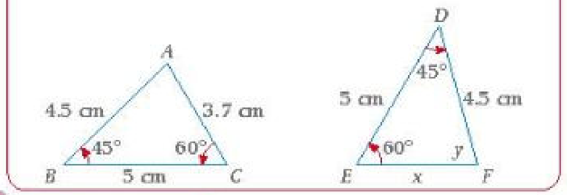


________ ________ ________

III. Analicen los siguientes pares de figuras y calculen los valores de x y de y.

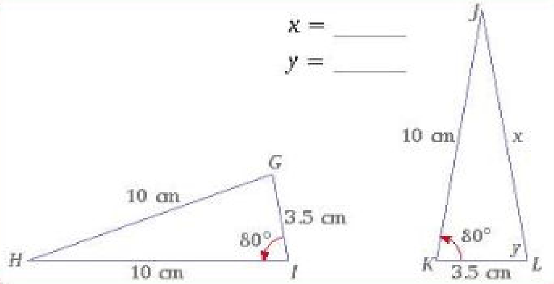
$x =$ ______

$y =$ ______

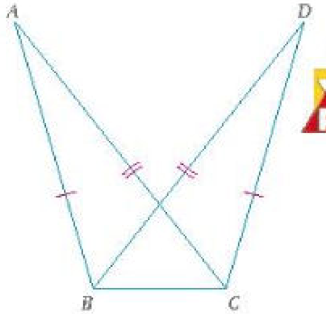


$x =$ ______

$y =$ ______



En las siguientes tres actividades usaremos los criterios de congruencia de triángulos para demostrar las proposiciones.



IV. En la figura de la izquierda, si $AB = DC$ y $AC = BD$, demuestren que $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$.

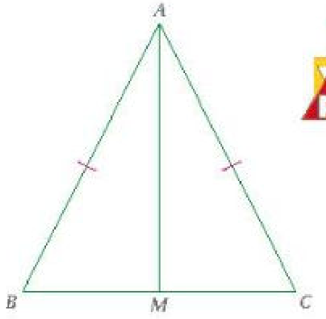
a) $AB = DC$ porque ________

b) $AC = BD$ porque ________

c) $BC = BC$ porque *es un lado común*

d) entonces $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ porque ________

____



V. En el triángulo ABC de la izquierda, si $AB = AC$ y M es el punto medio de BC, demuestren que $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$.

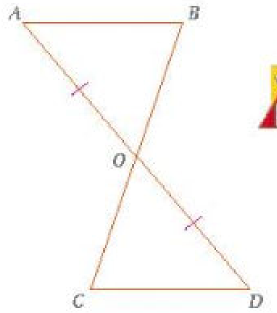
a) $AB = AC$ porque ... ________

b) $BM = CM$ porque ... ________

c) $AM = AM$ porque ... ________

d) entonces $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ porque ________

____



VI. En la figura de la izquierda, si AB es paralela a CD y $AO = OD$, demuestren que $\triangle AOB \equiv \triangle DOC$.

a) $AO = OD$ porque ________

b) $\angle AOB = \angle DOC$ porque ________

c) $\angle BAO = \angle CDO$ porque ________

d) entonces $\triangle AOB \equiv \triangle DOC$ porque ________

____

VII. Comenten con otras parejas los argumentos que dieron en cada una de las actividades **IV**, **V** y **VI** para justificar las afirmaciones que se usaron al hacer las demostraciones. Si no coinciden, analicen por qué y con ayuda de su maestro determinen los argumentos correctos.

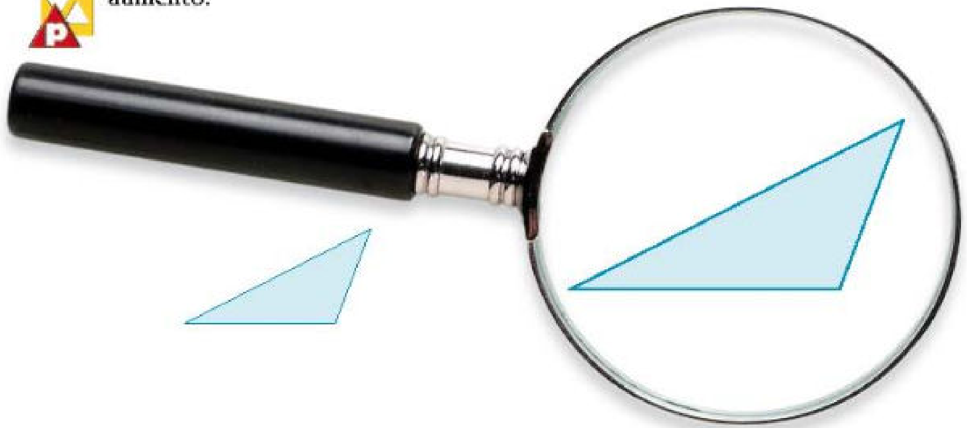
LECCIÓN 13

Criterios de semejanza de triángulos (1)

Establecimiento de tres criterios de semejanza de triángulos

Cuando hablamos de figuras semejantes, es decir, figuras que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, nos vienen a la mente objetos como un mapa de carreteras, el plano de una casa, una fotografía, una lente de aumento, un retroproyector, un telescopio o un automóvil a escala.

I. Consideren que al triángulo de la izquierda lo vemos a través de una lente de aumento.



a) Midan los lados del triángulo original y los del triángulo amplificado, pongan literales a los vértices y escriban la relación entre los ángulos correspondientes.

____

b) Anoten las razones de los lados del triángulo original respecto del triángulo amplificado. ____________

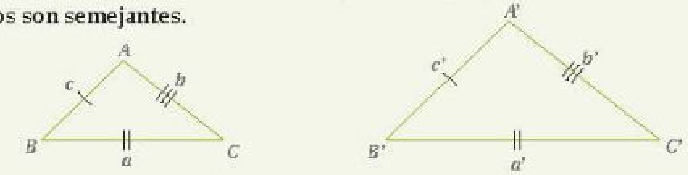
c) Escriban la relación entre las razones de los lados correspondientes de ambos triángulos. ____________

d) De acuerdo con sus respuestas en **a)** y **c)**, ¿cómo son ambos triángulos?

____

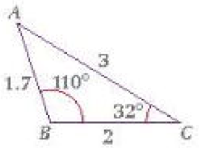
El resultado anterior nos conduce al primer criterio sobre semejanza de triángulos:

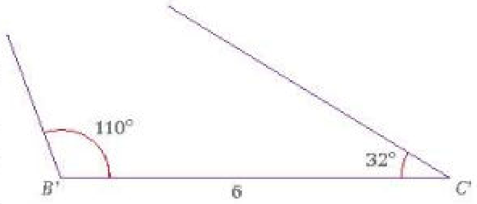
Criterio LADO-LADO-LADO (LLL)
Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



En símbolos (completen): Si $\frac{a}{\ } = \frac{\ }{b'} = \frac{c}{\ } =$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle$ ______

II. Consideren que estamos en el proceso de trazar un triángulo semejante al $\triangle ABC$ y llevamos trazados un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.





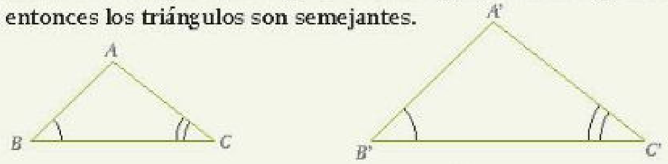
a) Completen el $\triangle A'B'C'$. ¿Queda determinado el $\triangle A'B'C'$ de manera única? ____ Jutifiquen su respuesta. ________

b) ¿Cuánto debe medir el tercer ángulo? ________. Justifiquen su respuesta. ____________

c) Midan los lados de ambos triángulos y el tercer ángulo. Comprueben que sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.

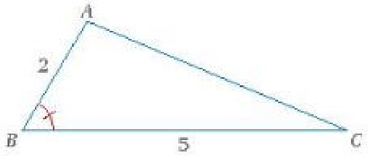
Este resultado nos conduce al segundo criterio sobre semejanza de triángulos:

Criterio ÁNGULO-ÁNGULO (AA)
Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.



En símbolos (completen): Si $\measuredangle B = \measuredangle$ ____ y $\measuredangle$ ____ $= \measuredangle C$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle$ ______

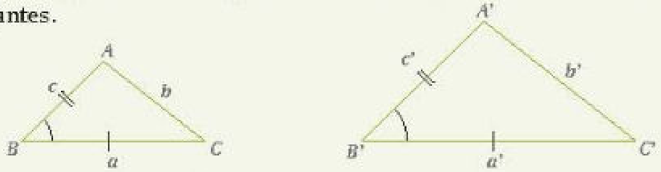
III. Nos piden trazar un $\triangle A'B'C'$ semejante al $\triangle ABC$ y hemos trazado ya un ángulo y los lados que forman este ángulo.



Si unimos los puntos A' y C', ¿el $\triangle A'B'C'$ es semejante al $\triangle ABC$? ____ Verifiquen si su respuesta es correcta estableciendo la comparación de los ángulos y las razones entre sus lados correspondientes.

Este resultado nos lleva al tercer criterio sobre semejanza de triángulos:

Criterio LADO-ÁNGULO-LADO (LAL)
Si dos lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos formados por esos lados son iguales, entonces los triángulos son semejantes.



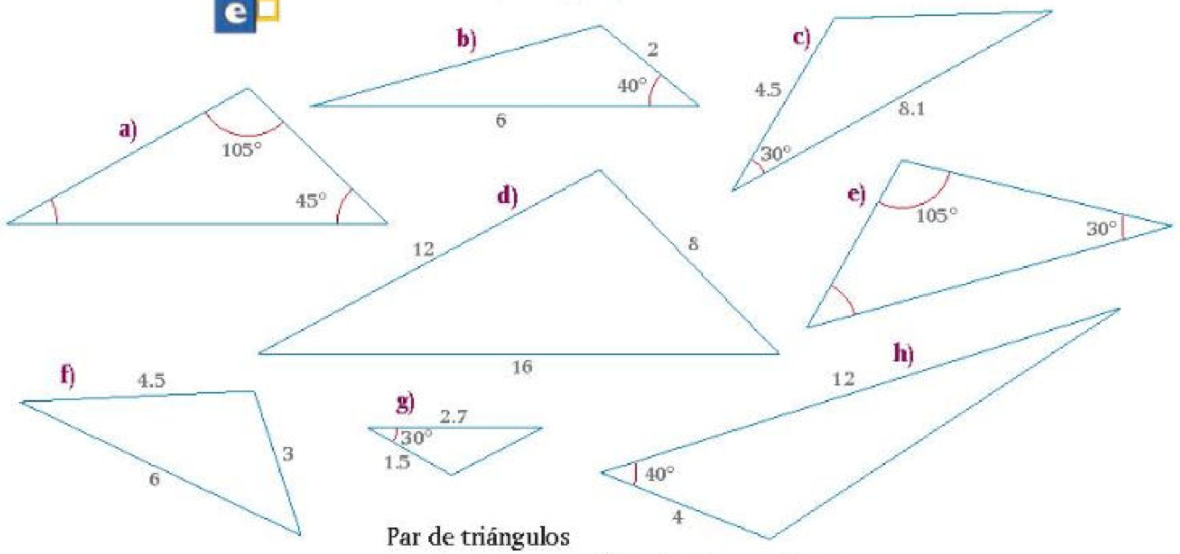
En símbolos (completen): Si $\frac{a}{\ } = \frac{\ }{c'}$ y $\measuredangle B = \measuredangle$ ____, entonces $\triangle ABC \cong \triangle$ ______

Criterios de semejanza de triángulos (2)

Identificación y uso de los tres criterios de semejanza de triángulos

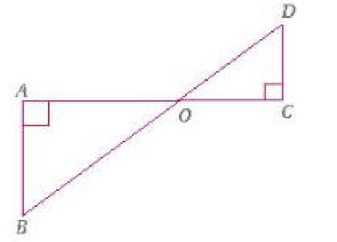
En la lección anterior establecimos los criterios de semejanza de triángulos. Los siguientes pares de figuras ilustran estos tres criterios:

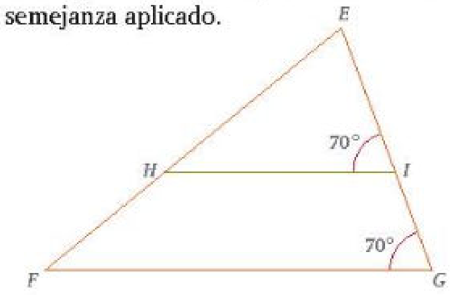
I. De los siguientes triángulos, identifiquen los pares que son semejantes y anoten el criterio de semejanza que aplicaron.



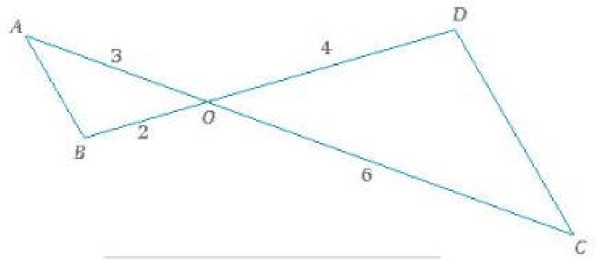
Par de triángulos semejantes	Criterios de semejanza

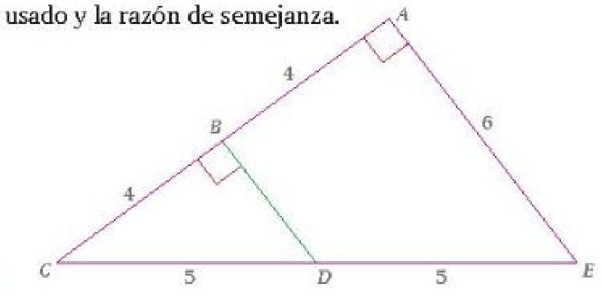
II. En las siguientes figuras identifica los triángulos semejantes, usa el símbolo ≅ para denotarlos y anota el criterio de semejanza aplicado.





III. En las siguientes figuras identifica los triángulos semejantes, usa el símbolo ≅ para denotarlos, anota el criterio de semejanza usado y la razón de semejanza.





IV. En el $\triangle ABC$ de la derecha, la recta ℓ es paralela al lado BC y corta a los lados del triángulo en los puntos D y E.

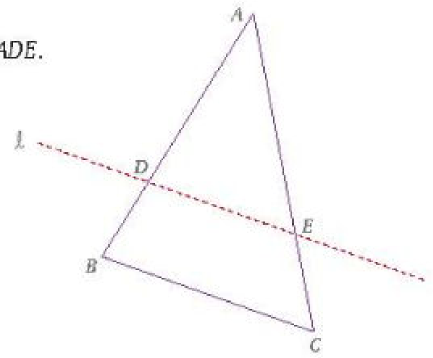
La siguiente argumentación es para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle ADE$.

Justifiquen cada paso de la demostración.

a) $\measuredangle ABC = \measuredangle ADE$ Porque ________

b) $\measuredangle A = \measuredangle A$ Porque ________

c) Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ Porque ________



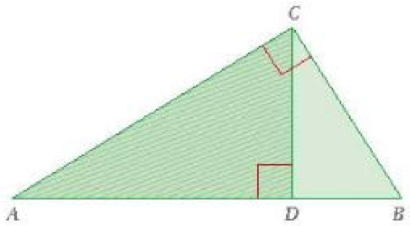
V. Consideren el triángulo rectángulo ABC, donde $\measuredangle ACB = 90°$. Desde el vértice C trazamos el segmento CD perpendicular al lado AB.

Demostraremos que $\triangle ABC \cong \triangle ACD$.

a) $\measuredangle ACB = \measuredangle ADC = 90°$ Porque *son datos*

b) $\measuredangle A = \measuredangle A$ Porque *es el mismo ángulo*

c) Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ Por *criterio de semejanza AA*



VI. Analicen la demostración anterior y en su cuaderno, con argumentos similares, demuestren que:

a) $\triangle ABC \cong \triangle CBD$

b) $\triangle ACD \cong \triangle CBD$

VII. Comparen todas sus respuestas de esta lección con las de otros equipos. Si hay diferencias analicen por qué y corrijan lo necesario.

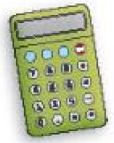
LECCIÓN 15

Relaciones de proporcionalidad (1)

Las proporciones en la purificación del agua

I. El papá de Bernardo tiene una planta purificadora de agua. El cliente acude con su garrafón y en el negocio lo lavan y lo llenan con agua purificada. El precio al que vende cada garrafón de 20 litros es de $11.
La semana pasada se vendieron 816 garrafones.

a) De acuerdo a la información, completa la siguiente tabla.



	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Garrafones vendidos	80	96	108	112	100		160
Dinero que se obtuvo por venta ($)	880						

b) Compara el resultado que obtuviste en la venta del sábado con tus compañeros más cercanos. En caso de que alguno tenga un resultado distinto, pídele que te explique su procedimiento y después explícale el tuyo. Traten de llegar a una conclusión.

c) ¿Cómo obtuviste los valores del renglón correspondiente a dinero que se obtuvo por venta? ______________________________

____

d) Comenta con tus compañeros para ver si coincidieron en el método y escriban una ecuación que relacione el *dinero que se obtuvo por venta* con la cantidad de *garrafones vendidos*.

e) Ordena, de menor a mayor, las cantidades de cada fila de la tabla. Después de ordenar dichas cantidades, ¿se conserva entre ellas la misma asociación que tienen en la tabla? ______ ¿Por qué debe ser así? ______________________________

____

____

f) Los valores ordenados en e), ¿cumplen con la ecuación que escribiste en d)? ______

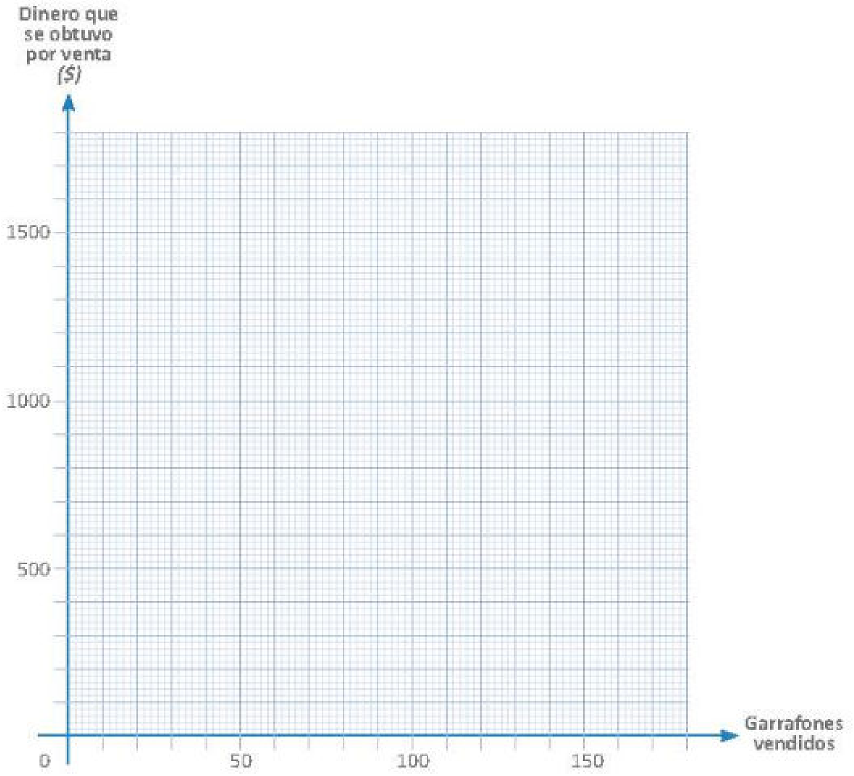
g) Calcula el promedio diario de garrafones vendidos durante la semana. ______

h) Calcula el promedio diario del dinero obtenido por ventas durante la semana.

______

i) Los promedios obtenidos en los incisos g) y h), ¿también cumplen con la ecuación que escribiste en el inciso d)? ______

j) En el siguiente cuadro, grafica los resultados de la tabla.



k) Los puntos que graficaste:

- ☐ Están alineados
- ☐ Forman una línea recta
- ☐ Forman un segmento de recta
- ☐ Forman un arco

l) ¿Existen puntos que corresponden a fracciones de garrafón? ______
¿Por qué? ______________________________

II. Algunos de los gastos de la planta purificadora del papá de Bernardo son fijos y otros son proporcionales a la cantidad de garrafones de agua que se producen. Aquí se enlistan algunos de dichos gastos; señala con la palabra **fijo** los que no cambian, y con la palabra **proporcional** los que consideres que aumentan, si la producción aumenta y disminuyen si la producción disminuye.

a) Renta del local ______________________

b) Electricidad para iluminación ______________________

c) Electricidad para los procesos ______________________

d) Agua para purificar ______________________

e) Agua para los sanitarios ______________________

III. Compara tus respuestas con algunos de tus compañeros. Si encuentran alguna discrepancia discútanla y propongan una manera de probar quién tiene razón.

LECCIÓN 16

Relaciones de proporcionalidad (2)

El agua desechada en el proceso de purificación

I. En la purificadora del papá de Bernardo, por cada litro de agua que entra en el proceso de purificación, salen 800 mililitros de agua purificada y el resto se desecha.

a) ¿Qué porcentaje del agua procesada se desecha? ____________

b) ¿Qué porcentaje del agua vendida representa el agua desechada? ___________

c) De acuerdo a la información, completa la siguiente tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Garrafones vendidos	80	96	108	112	100	160	160
Litros desechados	400	480					

d) ¿Cómo obtuviste los valores del renglón correspondiente a litros desechados?

____

____

e) Comenta con tus compañeros para ver si coincidieron en el método y escriban una ecuación que relacione la cantidad de litros desechados con la cantidad de garrafones vendidos.

f) Si se ordenan de menor a mayor los valores en cada fila de la tabla, ¿las parejas conservan la asociación que tienen en la tabla? ________

¿Por qué debe ser así? ____

____

g) Los valores ordenados en el inciso anterior, ¿hacen verdadera la ecuación que escribiste en el inciso **e**.

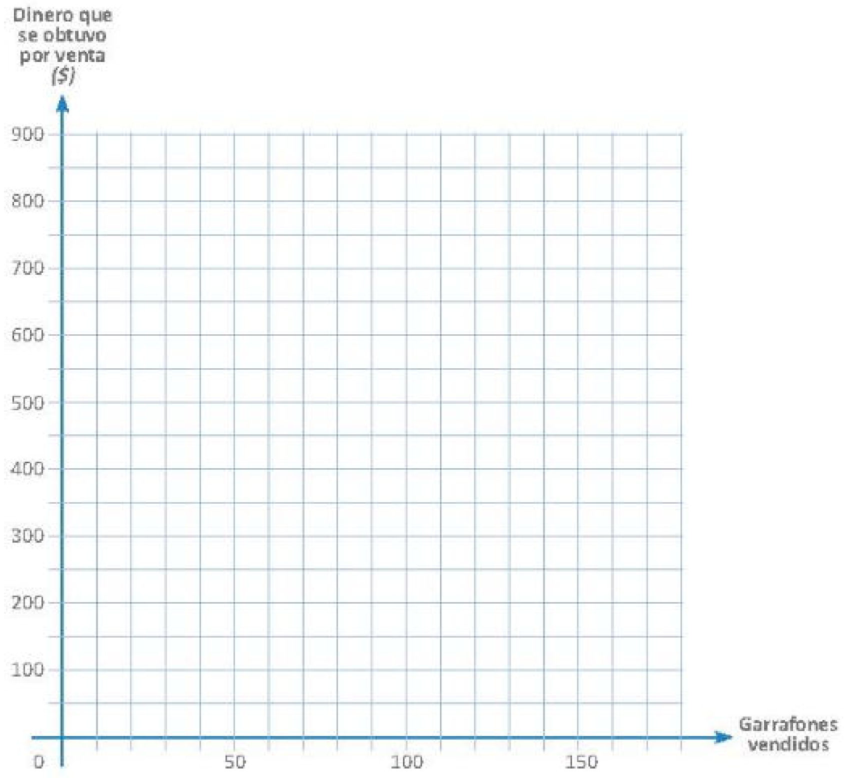
II. Compara tus respuestas con algunos de tus compañeros. Si encuentran alguna diferencia, discútanla y corrijan los errores.

Reto

Si por cada litro de agua que se va a purificar se obtienen sólo 800 ml de agua purificada, ¿qué volumen de agua se necesita para obtener un litro de agua pura?

III. Los resultados anteriores pueden examinarse de manera gráfica.

a) En el siguiente sistema de coordenadas, grafica los resultados de la tabla.



b) Los puntos que graficaste:

- ☐ Están alineados
- ☐ Forman una línea recta
- ☐ Forman un segmento de recta
- ☐ Forman un arco

c) Si solamente se venden garrafones completos, ¿sería posible graficar un punto que correspondiera a 73.5 garrafones vendidos? ________

d) ¿Cuántos litros desechados le corresponden a cero garrafones vendidos? ___________

e) Si un día se vende cierta cantidad de garrafones, y en otro día se vende el doble de ellos, ¿qué pasa con las respectivas cantidades de agua desechada?

____

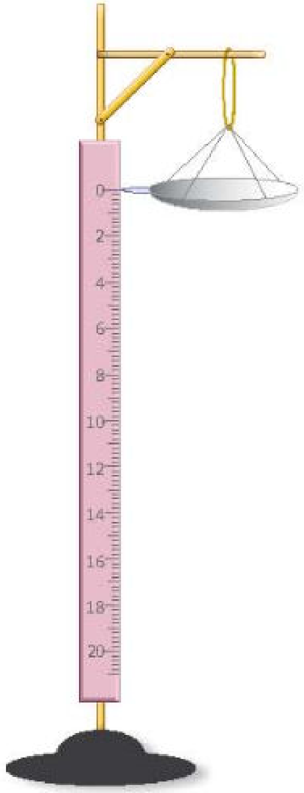
____

f) Se puede concluir que las cantidades de garrafones vendidos y litros desechados (son/no son) _______________ proporcionales.

Relaciones de proporcionalidad (3)

Identificación de funciones continuas

Elisa, con una regla, una liga, un plato desechable y otros objetos, hizo una báscula como la que se muestra en la figura. Colocó sucesivamente monedas iguales en el plato y anotó cuánto se elongaba la liga. En la siguiente tabla están los valores que obtuvo después de colocar hasta diez monedas.



Cantidad de monedas	Elongación (mm)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	
12	
13	

Glosario

Elongar. Alargar, estirar, hacer algo más largo por tracción mecánica.

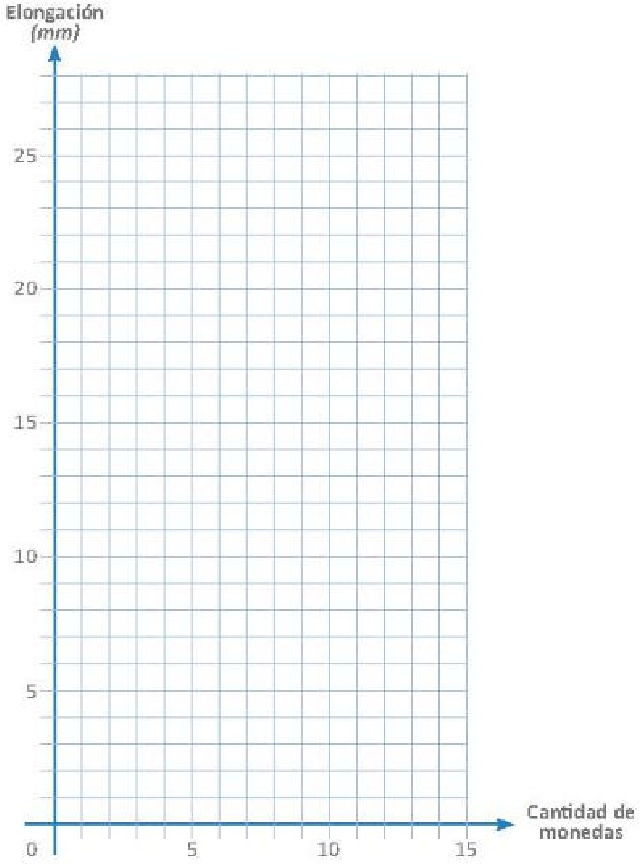
I. Con base en la situación descrita, contesten las preguntas que siguen.

a) Si la liga soportara el peso de más monedas, coloquen en la tabla los valores de la elongación que debieran corresponder a 11, 12 y 13 monedas, respectivamente.

b) ¿Cómo obtuvieron los valores correspondientes a la elongación que debiera soportar la liga con 11, 12 y 13 monedas? __________

c) Comparen con otros compañeros los procedimientos que siguieron y escriban una ecuación que relacione la cantidad de monedas con la elongación que experimenta la liga. __________

d) En el siguiente sistema de coordenadas, grafiquen los valores de la tabla.



II. Con base en la ecuación que obtuvieron en **I.c**, contesten:

a) En la práctica, ¿qué va a pasarle a la liga con un peso demasiado grande? __________

b) Suponiendo que Elisa pudiese poner pesos correspondientes a fracciones de moneda, ¿cuánto se elongaría la liga en cada uno de los siguientes casos?

- Con cero monedas _____ mm
- Con $\frac{124}{10}$ de moneda _____ mm
- Con 7.34 monedas _____ mm
- Con $\sqrt{12}$ monedas _____ mm

c) Añadan estos valores en la gráfica del inciso **d)** de la actividad **I**.

d) Todos los valores que pudiéramos graficar, sin que se rompa la liga, formarían:

- ☐ Una recta
- ☐ Una semirrecta
- ☐ Sólo un segmento de recta

e) Con base en lo anterior, escriban una conclusión que relacione el peso que se coloca en el plato con la elongación de la liga. __________

LECCIÓN 18

Relaciones de proporcionalidad (4)

Ahora con funciones acotadas

I. La cisterna de la casa de Enrique es un paralelepípedo rectangular que tiene 6 m^2 de base y 1.2 m de altura. Cuando la llenan, el agua fluye de tal manera que el nivel sube 2.5 cm por minuto.

a) Analiza con tus compañeros si la altura del nivel del agua aumenta proporcionalmente al tiempo en que la llave está abierta y anoten la conclusión a la que lleguen.

¿La altura del nivel del agua es proporcional al tiempo que la llave está abierta?

__________ Explica ______________________________________

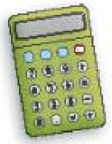
____

b) Si inicialmente la cisterna está vacía, ¿cuánto tiempo hay que mantener abierta la llave del agua para que la cisterna se llene? ____________________

c) ¿Qué altura tendrá el nivel del agua cuando hayan transcurrido 32 minutos?

____

d) Completa la siguiente tabla.



Tiempo (*minutos*)	10	12	16	20	24			40	
Nivel del agua (*cm*)						75	80		120

e) ¿Qué relación hay entre los valores del tiempo de las celdas que están en color azul? ______________________________

f) ¿Qué relación hay entre los valores del nivel del agua de las celdas que están en color azul? ______________________________

g) ¿Qué relación hay entre los valores del tiempo de las celdas que están en color verde? ______________________________

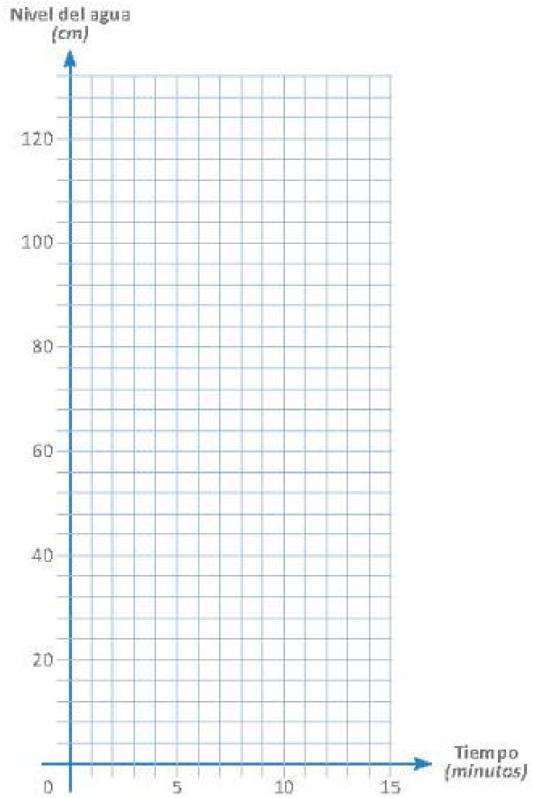
h) ¿Qué relación hay entre los valores del nivel del agua de las celdas que están en color verde? ______________________________

i) ¿Qué sucede si dividimos los valores del nivel del agua entre los valores del tiempo? ______________________________

____

j) Escribe una ecuación que sirva para determinar el nivel del agua cuando ha transcurrido un cierto tiempo ____________________. Verifica que con esa ecuación se pueden calcular los valores que obtuviste.

k) En el siguiente sistema de coordenadas, traza la representación gráfica que muestra el nivel del agua en función del tiempo.



l) Si usas la ecuación que obtuviste en el inciso **j** para calcular el nivel del agua cuando han transcurrido 60 minutos, ¿qué valor obtienes? ______________

¿Qué concluyes sobre el uso de esa ecuación? ____________________

____

m) Anota las coordenadas del punto inicial, es decir, cuando la cisterna está vacía y se abre la llave del agua: (,)

n) Anota las coordenadas del punto final, es decir cuando la cisterna se llena: (,)

o) ¿Tiene sentido considerar un tiempo menor al del inciso **m** o uno mayor al del inciso **n**? ________. Justifica tu respuesta ____________________

____

____

Reto

a) Haz una gráfica que represente la cantidad de litros de agua que tiene la cisterna en función del tiempo que esté abierta la llave y escribe la igualdad que relaciona ambas variables.

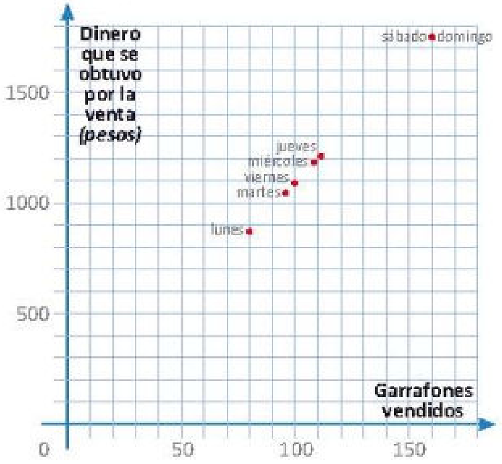
b) Julián, el vecino de Enrique, tiene una cisterna con la misma capacidad, pero tiene forma de cilindro y tiene 6 m^2 de base. ¿Cuál es la altura de su cisterna?

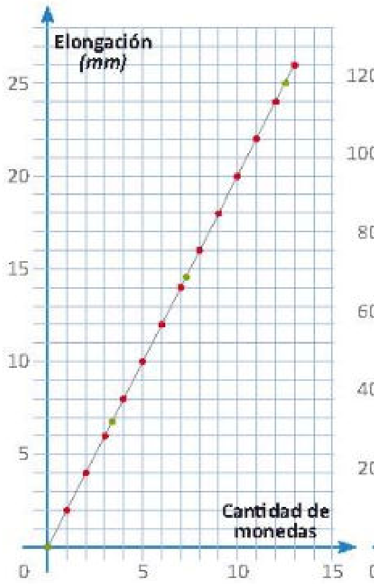
Relaciones de proporcionalidad (5)

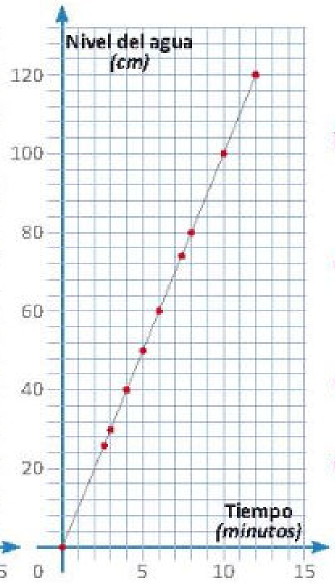
Síntesis de proporcionalidad y funciones

I. Considerando los resultados de las cuatro lecciones anteriores, contesten lo siguiente.

a) Analicen las cuatro gráficas que hicieron y comenten qué tienen en común.







En todos los casos las gráficas siguen una trayectoria ______________

b) ¿Cuáles de las cuatro gráficas son segmentos continuos? ______________

c) ¿En cuáles no pueden ser segmentos continuos sino sólo puntos aislados? ______________

d) ¿Cuáles representan una relación de proporcionalidad? ______________

e) ¿Qué tienen en común todas las igualdades que obtuviste en las actividades de las cuatro lecciones anteriores? ______________

II. ¿Cuáles igualdades representan una relación de proporcionalidad directa?

a) $y = 3x$ ______ **b)** $y = \frac{x}{5}$ ______ **c)** $y = \frac{2x}{7}$ ______

d) $y = x^2$ ______ **e)** $y = x$ ______ **f)** $y = 2x$ ______

g) $y = 4$ ______ **h)** $y = mx$, siendo m un número ______

III. La planta purificadora del papá de Bernardo está instalada en un local donde pagan \$180 de renta cada día; además, gastan \$6 por cada garrafón de agua que producen.

a) Los dos primeros renglones de la tabla siguiente ya tienen los datos que calculaste en la Lección 15. Así, el lunes vendió 80 garrafones y obtuvo \$880 por dicha venta. Pero en producir cada garrafón, gastó \$6, es decir, por los 80 garrafones gastó \$ ________; además pagó \$180 de renta ese día, es decir, ese lunes gastó en total \$ ________ ¿Corresponde lo que tú calculaste con lo que está anotado en la tabla como dinero que se gastó? ________

b) El papá de Bernardo gastó \$660 el lunes, pero obtuvo \$880 por las ventas, por tanto, ganó \$ ________ ese día. ¿Corresponde lo que tú calculaste con lo que está anotado en la tabla como ganancia obtenida? ________

c) Completa la tabla.

Día	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
Garrafones vendidos	80	96	108	112	100	160	160
Dinero que se obtuvo por venta (\$)	880	1 056	1 188	1 232	1 100	1 760	1 760
Dinero que se gastó (\$)	660						
Ganancia obtenida (\$)	220						

d) Cierto día se quemó un transformador, se quedaron sin energía eléctrica y sólo pudieron vender 13 garrafones. El papá de Bernardo ¿perdió o ganó dinero ese día? ________ ¿Cuánto? \$ ________

e) ¿Cuántos garrafones debe vender como mínimo para no perder? ________

Es claro que mientras más garrafones venda, más dinero gana. Sin embargo, las variables *garrafones vendidos* y *ganancia obtenida*, ¿son proporcionales? Explica ______________

Reto

Escribe una ecuación que relacione la ganancia obtenida con la cantidad de garrafones vendidos.

____

LECCIÓN 20

Relaciones de variación cuadrática (1)

Situaciones y problemas más allá de lo lineal

En varias disciplinas o ramas del conocimiento se presentan situaciones en las que elementos de un conjunto se relacionan con los de otro, de manera que cada elemento del primer conjunto está relacionado con sólo un elemento del segundo. Recordarás que a este tipo de relación se le llama **función**.

I. Al dejar caer un objeto, tardó diez segundos en llegar al suelo. Como la velocidad depende del tiempo transcurrido, se anotaron sus valores en distintos momentos y resultó la siguiente tabla. El tiempo está dado en segundos y la velocidad en metros por segundo. Contesten las preguntas que siguen.

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocidad	0	9.8	19.6	29.4	39.2	49	58.8	68.6	78.4	88.2	98

a) ¿Qué velocidad llevaba el objeto a los 7.5 segundos? ____________

b) ¿A qué velocidad hubiera tocado el suelo si hubiera tardado 4 segundos en caer? ____________

c) Un objeto que cae, ¿en qué momento alcanzará la velocidad de 150 m/s? ____________

d) De los datos de la tabla, ¿qué fórmula permite relacionar la velocidad con el tiempo? ____________

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y si hay diferencias, discútanlas hasta que se aseguren de que sus resultados estén correctos.

II. En un laboratorio de biología se lleva a cabo un cultivo de bacterias. Al inicio se coloca una bacteria en el medio adecuado y cada hora se registra el número de bacterias presentes. Analicen la relación entre el número de bacterias y el tiempo transcurrido que se muestra en la tabla y contesten las preguntas.

Tiempo (*horas*)	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias	10	40	90	160	250	360

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 12 horas? ________

b) ¿Cuántas bacterias habrá después de 24 horas? ________

c) ¿En cuánto tiempo habrá 2 250 bacterias? ____________

d) ¿En cuánto tiempo habrá 23 040 bacterias? ____________

e) ¿Cuál es la fórmula que relaciona la cantidad de bacterias con el tiempo transcurrido? ____________

III. Pedro gana \$50 diarios más que Juan. Pedro trabajó 3 días menos que Juan, pero ambos ganaron lo mismo: \$1 800. ¿Cuántos días trabajó Pedro?

Para resolver el problema es necesario determinar cuánto ganan Pedro y Juan en un día de trabajo. Si Juan trabajó x días, entonces se puede afirmar lo siguiente:

$$\textit{Salario diario de Juan} = \frac{1800}{x}$$

Como Pedro ganó la misma cantidad trabajando 3 días menos que Juan, se tiene:

$$\textit{Salario diario de Pedro} = \frac{1800}{x-3}$$

Como el salario de Pedro es igual al de Juan más \$50, se tiene la igualdad

$$\frac{1800}{x-3} = \frac{1800}{x} + 50$$

Simplifiquen la expresión anterior dividiendo todos los términos entre 10:

____

Multipliquen todos los términos por $x - 3$:

____

Multipliquen todos los términos por x:

____

Hagan las operaciones indicadas

____

En ambos miembros de la igualdad resten $180x$:

____

Ordenen los términos e inviertan la igualdad:

____________________ $= 0$

Dividan entre 5

____________________ $= 0$

Resuelvan la ecuación.

Sustituyan el valor de x en las expresiones *Salario diario de Juan* y *Salario diario de Pedro* y contesten las preguntas:

a) ¿Cuánto gana Juan en un día? ____________

b) ¿Cuánto gana Pedro en un día? ____________

c) Si Pedro ganó \$1 800, ¿cuántos días trabajó? ____________

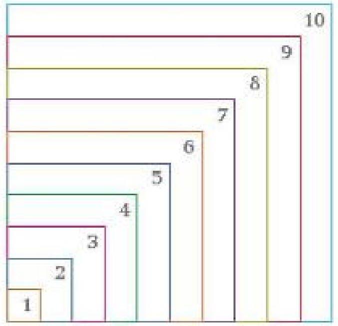
Comparen su procedimiento y respuestas con otros equipos y con ayuda de su profesor, analicen y corrijan lo necesario hasta que no tengan dudas.

LECCIÓN 21

Relaciones de variación cuadrática (2)

Cómo encuadrar figuras y fechas

I. Los cuadrados que se muestran en la figura tienen las medidas por lado indicadas en la tabla. Completen la tabla y los enunciados que siguen.



No. de cuadrado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Medida por lado (m)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Perímetro (m)										
Área (m^2)										

a) El área del cuadrado no. 1 es ____________ m^2

b) El perímetro del cuadrado no. 3 es ____________ m

c) El área del cuadrado no. ____________ es 6.25 m^2

d) El perímetro del cuadrado no. ____________ es 18 m

e) El área del cuadrado no. 11 es ____________ m^2

f) El perímetro del cuadrado no. 13 es ____________ m

g) El área del cuadrado no. ____________ es 49 m^2

h) El perímetro del cuadrado no. ____________ es 30 m

i) La fórmula que permite calcular el perímetro del cuadrado n es:

____

j) La fórmula que permite calcular el área del cuadrado n es:

____

¿Qué tipo de relación algebraica es la que se usa para calcular el perímetro? ____________

¿Qué tipo de relación algebraica es la que se usa para calcular el área? ________

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y si hay diferencias, discútanlas y corrijan los posibles errores.

II. Enseguida se muestra un mes del calendario. Supongan que x es un día de ese mes. El producto del número que está dos días después de x por el que está inmediatamente debajo de x es igual a la suma de 18 veces x, más 6. ¿Cuál es el valor de x?

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Sugerencia: para calcular el valor de x, escriban explícitamente los datos del problema.

Número que está dos días después de x: ____________

Número que está directamente debajo de x: ____________

Suma de 18 veces x, más 6: ____________

Relación entre el producto de los dos primeros datos con el tercero:

____

Ecuación resultante:

____

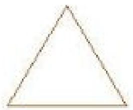
Soluciones de la ecuación;

x_1 = ____________ x_2 = ____________

Comprueben que los valores de x_1 y x_2 satisfacen las condiciones del problema.

¿Qué método usaron para resolver la ecuación resultante? ____________

III. Redacten un problema parecido al anterior, que requiera el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática. Intercambien el problema con el de otro equipo, resuélvanlos y verifiquen que los planteamientos y soluciones estén correctos. Si hay algún error, corríjanlo.



Reto

En una sucesión de triángulos semejantes, el primero tiene área de 2 cm^2, los lados del segundo miden lo doble de los del primero y los lados del tercero miden el triple de los del primero. ¿Cuáles son las áreas del segundo y tercer triángulos?

Si la sucesión de triángulos continúa con las mismas características, ¿cuál es la sucesión de sus áreas?

LECCIÓN 22

Probabilidad frecuencial

Medición de la probabilidad de un evento mediante la frecuencia relativa

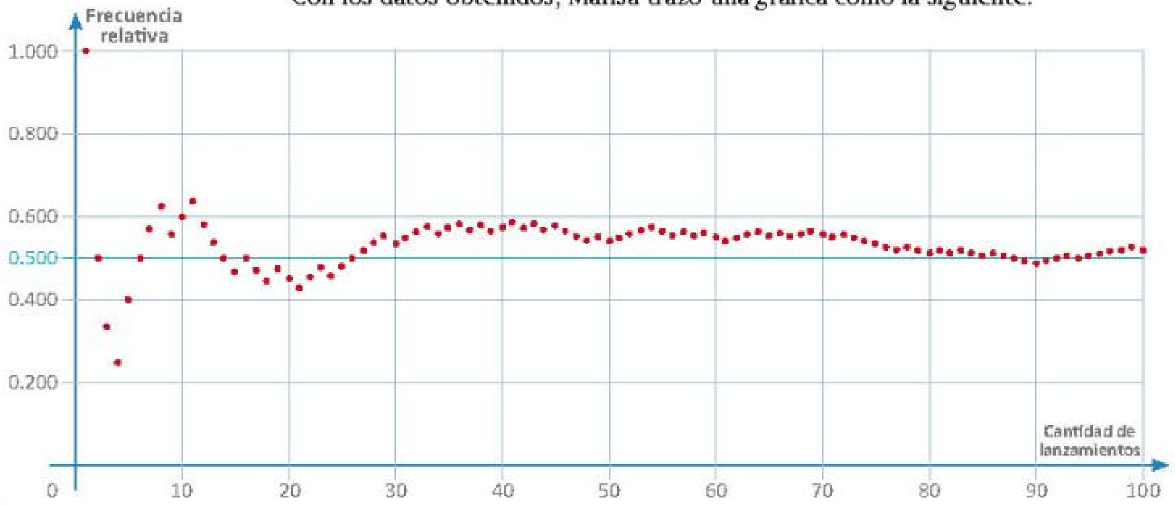
I. Cuando jugamos a los "*volados*", lanzamos una moneda al aire y pedimos *águila* o *sol*, que son los nombres que le damos a las caras de cualquier moneda en nuestro país. Además, suponemos que salir *águila* tiene la misma probabilidad que salir *sol*, es decir, suponemos que es un juego justo. Marisa quiso averiguar si efectivamente el juego era parejo para los dos jugadores, así que hizo un experimento: lanzó 100 veces la moneda y obtuvo los siguientes resultados.

A, S, S, S, A, A, A, A, S, A, A, S, S, S, S, A, S, S, A, S, S, A, A, S, A, A, A, A, A, S, A, A, A, S, A, A, S, A, S, A, A, S, A, S, A, S, S, S, A, S, A, A, A, A, S, S, A, S, A, S, S, A, A, A, S, A, S, A, A, S, S, A, S, S, S, S, S, A, S, S, A, S, A, S, S, A, S, S, S, S, A, A, A, S, A, A, A, A, A, S.

Después, Marisa quiso ver qué tan frecuentemente caía *águila* y decidió calcular dicha frecuencia después de cada lanzamiento. Así, al primer lanzamiento tuvo *águila*, su frecuencia fue de 100%, es decir, la frecuencia relativa fue 1. Después del segundo lanzamiento su frecuencia fue 0.50 (pues la primera vez cayó *águila* y la segunda *sol*); con tres lanzamientos, la frecuencia fue 0.333; con cuatro, 0.250, y así sucesivamente.

Lanzamiento 1	Lanzamiento 2	Lanzamiento 3	Lanzamiento 4	Lanzamiento 5	Lanzamiento 6
					
Frecuencia relativa de veces que cayó águila					
1/1	1/2	1/3	1/4	2/5	3/6
Resultado de los primeros seis lanzamientos					

Con los datos obtenidos, Marisa trazó una gráfica como la siguiente.

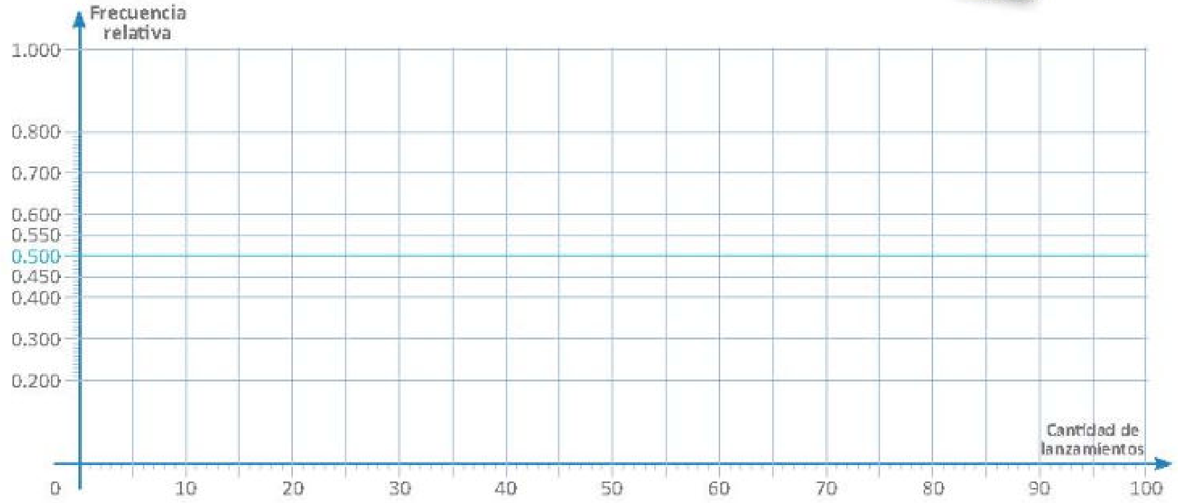


Marisa sabe que la gráfica no puede ser una línea continua porque no hay valores intermedios entre un lanzamiento y otro. Sin embargo, cuando son muchos lanzamientos, es muy cómodo hacer la gráfica continua porque los puntos resultan estar muy cercanos. Además, cuando se trazan líneas continuas es más fácil visualizar los cambios bruscos.

a) Tomen una moneda, láncenla al aire varias veces (unas 100 veces), pero en cada ocasión, registren si cayó *águila* o cayó *sol*. (Si llega a caer de canto, no se toma en cuenta ese lanzamiento).

b) Calculen las frecuencias relativas de las veces que cayó *águila* después de cada lanzamiento.

c) En el cuadro siguiente, grafiquen los resultados que obtuvieron.



II. Contesten lo siguiente.

a) ¿La frecuencia relativa puede ser mayor que 1? ________
¿Por qué? ____________________

b) ¿La frecuencia relativa puede ser menor que 0? ________
¿Por qué? ____________________

c) Precisamente, una manera de definir la probabilidad es mediante la frecuencia relativa, por lo tanto, el número que se asigna a la probabilidad es un valor entre _____ y _____, inclusive; es decir, no puede ser mayor que _____ y no puede ser ______________

d) Conforme aumenta la cantidad de lanzamientos de la moneda, la frecuencia relativa oscila alrededor de ______________

e) Entonces, basándose en los resultados que obtuvieron al lanzar la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga *águila*? ____________

f) De acuerdo a lo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que caiga *sol*? ________

Los eventos se pueden catalogar (1)

Eventos complementarios, excluyentes, imposibles y seguros

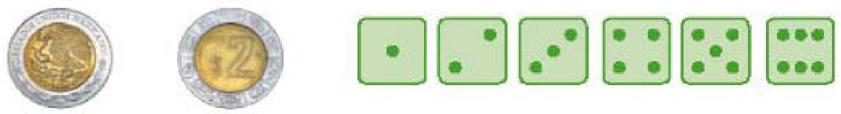
I. Si se tiene un evento, por ejemplo, *caer águila*, éste tiene cierta probabilidad de ocurrir. También habrá un evento que ocurre cuando el primero no lo hace, y éste se llama **evento complementario**. En nuestro ejemplo, el evento complementario de *caer águila* es *no caer águila*.

a) ¿Cuál es la probabilidad de "no caer *águila*"? ____________

b) En un dado común, con sus caras numeradas del uno al seis, ¿cuál es el evento complementario de "caer 4"? Descríbanlo de dos maneras distintas. "No ________", o también "caer 1, o caer 2, o ____________"

c) Para el mismo dado, ¿cuál es el evento complementario de "caer un número mayor que 4?" ____________

d) Para el mismo dado, ¿cuál es el evento complementario de "caer un número menor que 4?" ____________



II. Al lanzar un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, el evento "salir un impar", excluye al evento "salir 4", y viceversa: si ocurre "salir 4", ya no puede ocurrir el evento "salir un impar", por ello se dice que son **eventos mutuamente excluyentes**.

a) "Salir 4" no es el único evento excluyente de "salir un impar". Den otro evento. ____________

b) ¿Cuál es el evento complementario de "salir 6"? ____________
El evento "salir 6" y su evento complementario, ¿son eventos mutuamente excluyentes? ______ ¿Pasará siempre lo mismo con cualquier par de eventos complementarios? ______

c) Los eventos "caer un número mayor que 4" y "caer 4", ¿son eventos complementarios, mutuamente excluyentes o ambas cosas? ____________

d) Los eventos "caer un número mayor que 4" y "caer un número menor que 4", ¿son eventos complementarios, mutuamente excluyentes o ambas cosas? ____________

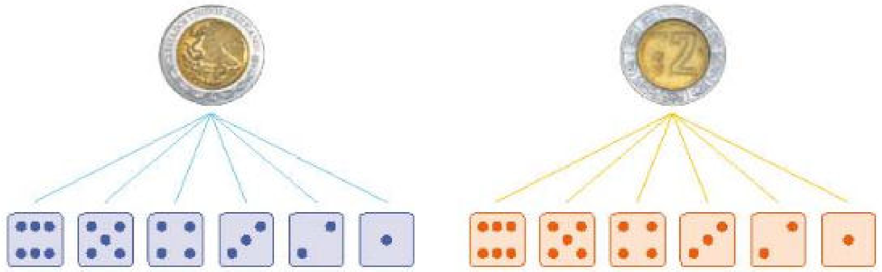
Si un evento ocurre, ¿ocurre su evento complementario? ____________

Con base en lo anterior, discutan los conceptos de *eventos complementarios*, *mutuamente excluyentes* y su combinación. Formulen una conclusión y compárenla con las de otros compañeros.

III. Si se tiene un dado común, con sus caras numeradas del 1 al 6, el evento complementario de "caer 4" será simplemente "no caer 4", pero también podemos decir que el evento complementario de "caer 4" es "caer 1, o 2, o 3, o 5, o 6"

a) El evento complementario de "caer un número par" es "caer 1, o ____________"

b) Los eventos "caer 1, o 2, o 6" y "caer 3, o 4, o 5" son eventos mutuamente excluyentes y, además, eventos ____________



IV. Susana lanza una moneda y anota "*A*" si sale *águila*, o "*S*" si sale *sol*; enseguida lanza un dado y anota junto a la letra el número que sale. Así, sus anotaciones pueden ser *A*3 si la moneda salió *águila* y el dado 3; o *S*5 si la moneda salió *sol* y el dado salió ______

a) ¿Cuántos resultados posibles puede anotar Susana? ______

b) Haz una lista con todos los resultados posibles. *A*1, *A*2, ____________

c) Señala con **Sí** o con **No** si los siguientes resultados pertenecen o no a la lista de eventos posibles:

S 6 ____	*A* 4 ____	*S A* ____	1 *A* ____	6 *S* ____
1 6 ____	*A* 8 ____	T 4 ____	*A* 1 ____	*A* 6 ____

d) A cualquier evento que no puede ocurrir se le llama **evento imposible**. El evento imposible tiene una probabilidad ____________ de ocurrir.

e) Al evento complementario del evento imposible se le llama **evento seguro** y tiene una probabilidad ____________ de ocurrir. El evento seguro siempre contiene todos los eventos posibles.

f) Una vez que Susana lanza la moneda y anota el resultado, ¿influye éste en lo que resulte al lanzar el dado? ______
¿Por qué? ____________

Discutan los conceptos de evento seguro y evento imposible. Formulen una conclusión y compárenla con la de otros compañeros, y si hay diferencias importantes, muéstrenlas a su profesor.

LECCIÓN 24

Los eventos se pueden catalogar (2)

Probabilidad de eventos complementarios, excluyentes, imposibles y seguros

I. Lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6. Si el dado está bien fabricado, se espera que todas sus caras tengan la misma probabilidad de salir. Considera el evento de lanzar un dado y ver la cara que queda hacia arriba.

¿Cuál evento tiene mayor probabilidad?

a) “Salir el 6” o “salir el 3”. ____________

b) “Salir un número par” o “salir un número impar”. ____________

c) “Salir el 2” o “salir el 7”. (¡Sí, el 7!). ____________

d) “Salir el 4” o “salir un número par”. ____________

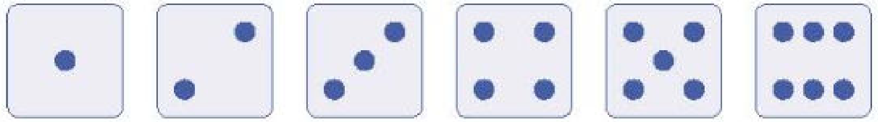
e) “Salir un número par” o “salir 2, 3 o 4”. ____________

f) “Salir un número mayor que 3” o “salir 2 o 5”. ____________

g) “Salir un número par mayor que 3” o “salir 2, 3 o 4”. ____________

II. En la actividad anterior, comprobaron que algunos eventos pueden descomponerse en otros más simples, por ejemplo, “salir un número par” se cumple si sale 2, 4 o 6; análogamente, “salir un número par mayor que 3” se cumple si sale un número par y si ese par es mayor que tres, es decir, se cumple si sale 4 o 6.

Sabemos que, en el caso de un dado cúbico, son seis los eventos que no se pueden descomponer en dos o más eventos. A éstos les llamamos **eventos elementales**.

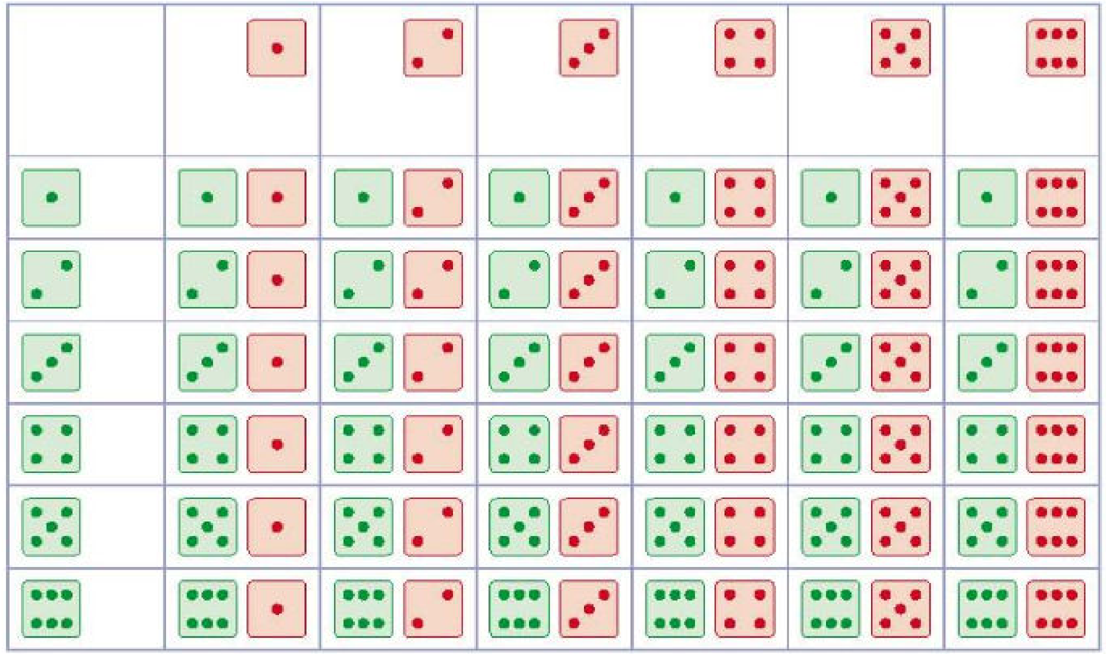


a) En el caso de lanzar una moneda hay ______ eventos elementales, ¿cuáles son? ____________

b) Cuando lanzamos dos monedas, por ejemplo una de \$2 y otra de \$10, hay cuatro eventos elementales, ¿cuáles son? ____________

c) ¿El evento “la moneda de \$2 sale *águila* y la moneda de \$10 sale *sol*” es el mismo que “la moneda de \$2 sale *sol* y la moneda de \$10 sale *águila*”? ______

d) Al lanzar dos dados, uno verde y otro rojo, ¿cuántos eventos elementales hay? ____________



e) Al lanzar esos dos dados, el evento “la suma de las caras es cuatro” puede ocurrir con cualesquiera de los ________ eventos elementales, que son: “el dado verde sale 1 y el rojo sale 3”, “el dado verde sale ________ y el rojo sale ________”, y “el dado ____________________”

f) Cuando los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir, para calcular la probabilidad de un evento cualquiera basta sumar la cantidad de eventos elementales que son favorables para que ocurra, y dividir este valor entre el total de eventos elementales. Así, al lanzar dos dados, la probabilidad del evento “la suma de las caras es cuatro” la podemos calcular dividiendo la cantidad de eventos elementales a favor ________ entre el total de eventos elementales ________, que al simplificar da $\frac{1}{12} = 0.0833$.

g) Al lanzar dos dados, la probabilidad del evento “la suma de sus caras es siete” puede calcularse dividiendo ________ entre 36. ¿Cuántos de los eventos elementales no están a favor de que la suma de las caras sea 7? ________

h) Al lanzar dos dados sucede uno de los siguientes hechos: “la suma de sus caras es 7” o “la suma de sus caras no es 7”, ambos son eventos complementarios, por tanto, el evento “la suma de sus caras es 7 o no es 7” es el evento seguro, el cual tiene probabilidad 1. ¿Cuánto deben sumar la probabilidad de un evento y la probabilidad del evento complementario? ________

i) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de sus caras sea 7? ________/36.

¿Cuál es el evento complementario? ____________

¿Cuál es la probabilidad de este evento complementario? ____________

La probabilidad del evento complementario también puede calcularse restando a 1 la probabilidad del evento. Verifíquenlo con este caso.

LECCIÓN 25

Eventos independientes

Cálculo de la probabilidad de los eventos independientes

I. Al lanzar tres monedas, cada una de ellas puede caer *águila* o *sol*. Por ejemplo, si las dos primeras caen *sol* y la tercera moneda cae *águila*, esto lo podremos representar como *SSA*, que es diferente si escribimos *SAS*, pues aquí se indica que es la segunda moneda la que cae *águila*.

Dos de las tres posibilidades distintas para "Caer un *águila* y dos *soles*"

a) ¿Cuántos resultados posibles puede haber? ________. Representa cada uno con tres letras, tal como se indicó.

____

b) Si la primera moneda cae *águila*, ¿influye en lo que cae la segunda? ________

c) Y si la primera moneda cae *sol*, ¿influye para lo que caerá la segunda? ________

d) ¿Los resultados de las dos primeras monedas influyen en lo que caerá la tercera moneda? ________

Cuando un evento no influye sobre otro, reciben el nombre de **eventos independientes**, y en caso contrario, se les llama **eventos dependientes**.

II. Al lanzar tres monedas se tienen las siguientes ocho posibilidades: *AAA*, *AAS*, *ASA*, *SAA*, *SSA*, *SAS*, *ASS*, *SSS*. Cada una de ellas es un evento elemental.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas, se obtenga el resultado *AAS*? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera moneda caiga *águila*? ________. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda moneda caiga *águila*? ________. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera moneda caiga *sol*? ________. Cada uno de estos eventos es independiente de los otros, y si los tres eventos se cumplen de manera simultánea, se tendrá el evento *AAS*.

c) La probabilidad simultánea de eventos independientes se puede obtener mediante el producto de las probabilidades de los eventos en cuestión. Verifícalo con los resultados de los incisos anteriores.

III. Cuando resolviste la primera pregunta del inciso **b)** de la actividad anterior, seguramente utilizaste un razonamiento similar a alguno de los siguientes:

Primero: "Hay cuatro posibilidades donde la primera moneda cae *águila*: {*AAA*, *AAS*, *ASA*, *ASS*} y el total de posibilidades son 8, por lo tanto, la probabilidad buscada es 4/8 = 1/2".

Segundo: "La primera moneda sólo puede caer *águila* o *sol*, por tanto la probabilidad buscada es 1/2".

a) ¿Cuál de los dos razonamientos es correcto? ________ ¿Por qué? ________

____

b) Si piensas que el otro razonamiento no es correcto, señala por qué no lo es.

____

____

IV. Para contestar las siguientes preguntas, consideren todos los eventos elementales que se tienen al lanzar tres monedas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una moneda caiga *sol*? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una moneda caiga *sol*? ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más una moneda caiga *sol*? ________

V. Consideren todos los eventos posibles de las caras, numeradas del 1 al 6, que muestran tres dados comunes al ser lanzados. Dichas posibilidades son los **eventos elementales**.

a) ¿Cuántos eventos elementales se tienen? ________

b) Para calcular cuántos eventos elementales muestran un 4 en el primer dado y ningún 4 en los otros dos, debemos considerar que el primer dado muestra un 4, es decir, sólo hay una posibilidad; que el segundo dado muestre un número que no sea 4, es decir hay cinco posibilidades; que el tercer dado muestre un número que no sea 4, también hay cinco posibilidades. En total hay ________ eventos elementales con esta característica.

c) ¿Cuántos eventos muestran un 4 en el segundo dado y no muestran un cuatro en los otros dos dados? ________

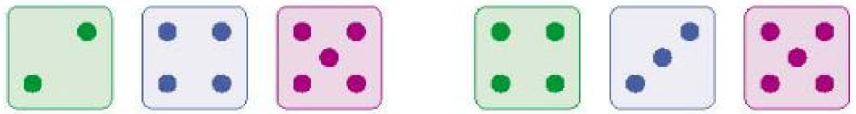
d) ¿Cuántos eventos muestran solamente un 4, no importa en qué dado sea? ________

e) ¿Cuántos eventos muestran exactamente dos dados con el número 4? ________

f) ¿Cuántos eventos muestran los tres dados con el número 4? ________

g) ¿Cuántos eventos muestran al menos un número 4? ________

h) Qué es más probable al lanzar tres dados, ¿que salga al menos un cuatro o que no salga ningún cuatro? ________ Den la probabilidad de cada caso.



Dos de las 75 posibilidades de mostrar un solo 4 al tirar tres dados comunes

VI. *A* y *B* son dos puntos que están separados a cuatro metros de distancia. Juan inicialmente está parado en la mitad del camino entre *A* y *B* y lanza una moneda; si la moneda cae *águila*, Juan se desplaza un metro hacia *A*, pero si cae *sol*, él se desplaza un metro en dirección hacia *B*. Después del primer desplazamiento, Juan vuelve a lanzar la moneda y camina un metro en la dirección que le indique la moneda, según lo establecido.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que después de dos lanzamientos, Juan se encuentre en la posición inicial? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que después de dos lanzamientos, Juan se encuentre en el punto *A*? ________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que después de dos lanzamientos, Juan se encuentre en el punto *B*? ________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que después de un lanzamiento, Juan se encuentre en la posición inicial? ________

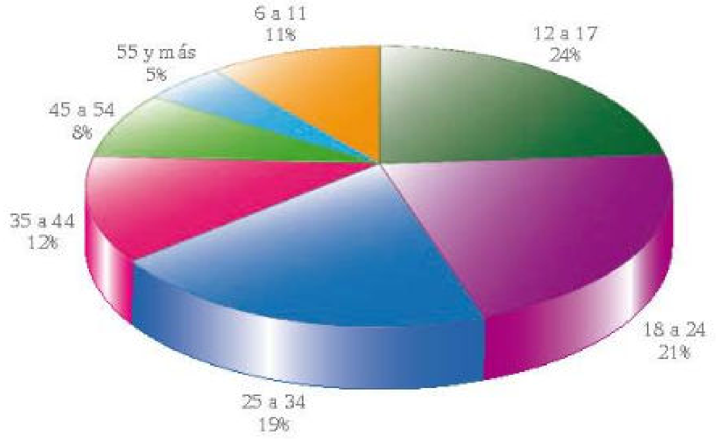
LECCIÓN 26

Las encuestas

Población y muestra

I. En 2012, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) dio a conocer su publicación *Estadísticas*, a propósito del día mundial de Internet en la cual, entre muchos datos, dice que "En abril de 2012, el 40 por ciento de la población de México, de seis años de edad o más, se declaró usuaria de Internet". También contiene la siguiente gráfica

Usuarios de Internet por grupos de edad 2012



Fuente: http://www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/Contenidos/estadisticas/2013/internet0.pdf consultado el 28 de mayo de 2013 a las 11:48 horas.

Entre otras preguntas y comentarios de algunos lectores de esta información están:

- ¿Cómo saben eso sobre todos los mexicanos? A mí no me preguntaron. (Lulú, una alumna del 2°A).
- El INEGI dice que el 40% de la población, es decir, para todo el país, ¿cuál será el porcentaje de los alumnos de la escuela? No creo que sea el mismo. (El profesor de Lulú).
- ¿En 2014, de los usuarios de Internet, habrá más de 5% que sean mayores de 54 años? (La abuelita de Lulú).

Comenten las anteriores preguntas y respondan lo siguiente.

a) Sabemos que no les preguntaron a todos (es el caso de Lulú), entonces ¿qué tan cierta será la información? ______________________

b) Supongamos que la información es verídica, ¿eso significa que 40% de los niños de cada escuela primaria y secundaria del país, es usuario de Internet? ______

c) La información de un momento determinado, ¿puede cambiar con el tiempo? En este caso, ¿cuál será la respuesta más creíble para contestarle a la abuelita de Lulú? Den argumentos que la apoyen ______________________

Para saber las preferencias entre un grupo de personas, a veces basta conocer las que tiene una parte del grupo en lugar de encuestar a todos los miembros. Ello es muy conveniente si el grupo que se quiere estudiar es muy numeroso, o si el estudio causa la inhabilitación del grupo, por ejemplo, los cerillos que se fabricaron en una jornada de trabajo, ¿sirven todos?

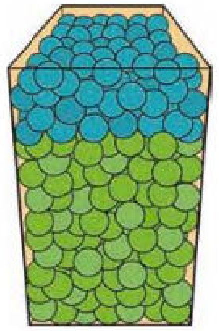
II. Con la finalidad de entender por qué para estudiar un grupo grande, llamado **población**, basta estudiar un grupo pequeño, llamado **muestra**, piensen en el siguiente experimento.

1) Tienen un barril lleno de canicas, seguramente hay miles, de las cuales unas son azules y otras son verdes.
2) Meten la mano en el barril y sacan al azar algunas canicas;
3) Cuentan cuántas canicas hay de cada color en la muestra que tomaron.

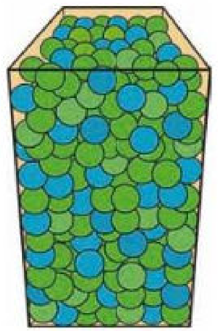
¿Qué esperan que pueda ocurrir con las proporciones de canicas azules y verdes que sacaron, respecto a las proporciones de las del barril, si:

a) las canicas están bien mezcladas? ______________________

b) las canicas no están mezcladas? ______________________



No están mezcladas



Están bien mezcladas

c) Para extraer una muestra, digamos de 20 canicas, que fuera representativa de las proporciones de canicas azules y verdes que tiene el barril, ¿es necesario mezclarlas bien antes de sacarlas? ______ ¿Por qué? ______________

d) A José se le ocurrió medir la altura del barril (era de 80 cm), y extrajo una canica a cada 4 cm de profundidad. ¿La proporción de canicas azules y verdes de su muestra será más representativa de la proporción que si sólo hubiera tomado 20 canicas de la superficie? ______ ¿Por qué? ______________

e) Cabe aclarar que, en este caso, la población la conforman todas __________ del barril y la muestra la conforman las 20 __________ que extrajimos de la población de __________.

LECCIÓN 27

Extracción de una muestra

Muestra representativa, tamaño de muestra y muestreo aleatorio

Supongamos que queremos saber la opinión de los mexicanos sobre algún asunto. Por lo general, hay dos maneras de saberlo:

1) Preguntar a una muestra de personas de la población.
2) Preguntar a todas las personas de la población.

En el primer caso el método se denomina **muestreo**, en el segundo caso se llama **censo**.

Glosario

Encuesta
Por encuesta nos referimos a una investigación o estudio, considerando a un conjunto de preguntas tipificadas dirigidas a una muestra representativa, para averiguar corrientes de opinión o diversas mediciones. Por encuestar se entiende que se trata de someter a encuesta un asunto.

I. La información que se quiere obtener también puede referirse a objetos, no sólo a personas. Por ejemplo, de la cosecha de mazorcas que cosecha un agricultor, las cuales son varios miles, éste quiere saber qué largo tienen en promedio.
En los siguientes espacios, coloquen la palabra *población* o *muestra*, según se trate.

a) El conjunto de todas las mazorcas es la ______________. Si el agricultor mide el largo de todas y cada una de sus mazorcas, estará haciendo un censo y de allí obtendrá el promedio.
b) También puede sacar una ______________ de las mazorcas, medir su largo y calcular con ello el promedio.
c) Es de esperarse que el promedio del largo de las mazorcas de la __________, que es lo que el agricultor quería saber, sea muy parecido al promedio del largo de las mazorcas de la ____________.

II. En los siguientes casos, señalen si los datos se obtienen de un censo o de una encuesta por muestreo.

a) Registro de escuelas que hay en México.
b) Audiencia de un programa de televisión.
c) Electores con credencial para votar.
d) Duración promedio, o vida útil, de un foco ahorrador.
e) Niños vacunados en las escuelas.

III. A la cantidad de elementos que contiene una muestra se le llama **tamaño de muestra**.

a) En la actividad **I**, si el agricultor toma una muestra de tamaño 100, ¿tendrá mayor o menor aproximación que si toma una muestra de tamaño 400? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

b) En un municipio que tiene 8 443 habitantes, hay 6 013 electores, es decir, personas que pueden votar. Se seleccionan 500 electores para ver a qué partido político favorece la tendencia del voto. Entonces, la población a investigar es de ________ personas y el tamaño de la muestra es de ________ personas.
c) ¿En cuáles de los siguientes casos la selección aleatoria de la muestra es representativa de la población a investigar? Justifiquen su respuesta.

- Se seleccionaron al azar 500 personas que estaban en las oficinas de un partido político y si tenían credencial de elector se le preguntaba por cuál partido votarían.
  ________ es representativa porque ______________________________
- Se seleccionaron al azar 500 personas que salieron el domingo del templo y se les preguntaba por cuál partido votarían.
  ________ es representativa porque ______________________________
- Se marcó un teléfono de cada columna del directorio telefónico, hasta completar 500, y a la persona que contestó se le preguntaba si tenía credencial de elector; en caso afirmativo se le preguntaba por cuál partido votaría.
  ________ es representativa porque ______________________________

Para tomar una muestra representativa, no se requiere mezclar todos los objetos de la población a investigar. Basta tomar la muestra de manera aleatoria, es decir al azar. A esto se le llama **muestreo simple**.

IV. Cuando se quiere tomar una muestra, es muy cómodo tener a la mano una lista de la población. Por ejemplo, si la población consta de los alumnos del salón, tomamos la lista y numeramos cada uno de los nombres.

a) Si la lista consta de 30 alumnos y queremos encuestar a cinco, significa que encuestaremos a uno de cada ______ alumnos.
b) Por tanto, un buen método para seleccionarlos será tomar los primeros 6 nombres de la lista, numerarlos del 1 al 6, lanzar un dado de seis caras y encuestar al alumno que corresponde al número que señaló el dado. El procedimiento se repite hasta que se acabe la lista. ¿Cuántos alumnos se encuestan con este procedimiento? ______ ¿Todos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados? ______. Con este método, ¿pueden ser encuestados los dos alumnos que tienen número de lista 6 y 7? ______. ¿Y los que tienen número de lista 5 y 6? ______.
c) Otro método puede ser el de escribir cada uno de los 30 números en un papel, meter todos los papeles en una caja, extraer cinco papeles al azar y encuestar a los alumnos que tengan los números de lista que marcan los papeles seleccionados. ¿Todos los alumnos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados? ______ Si empleamos este método, ¿pueden ser encuestados los alumnos que tienen número de lista 6 y 7? ______. ¿Y los que tienen número de lista 5 y 6? ______.
d) Paco consiguió un dado con 30 caras, numeradas del 1 al 30, y lo lanzó cinco veces. Anotó los números y encuestó a los alumnos a quienes correspondían esos números de lista. ¿Funcionará este método igual que el del inciso anterior? ______ ¿Por qué? ______________________________

____

LECCIÓN 28

Estimación de totales y de porcentajes en una población

Generación de números aleatorios para seleccionar una muestra

Hay varias formas de extraer una muestra aleatoria. Si se puede numerar a la población, el problema se reduce a obtener una lista aleatoria de esos números.

La manera más simple para hacerlo es utilizar un generador de números aleatorios. Bonito nombre... Sin embargo, cuando se sacan los papeles de una urna en una rifa, se usa un generador de números aleatorios; al generador lo forman la caja con los boletos de la rifa y la mano que los extrae. Otra manera es usar dados, pues además del cubo hay de muchos tipos, y son generadores de números aleatorios.

Por ejemplo, para sacar aleatoriamente un número del 1 al 1 000 se toma un dado de diez caras, numeradas con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y se lanza tres veces. Si salieron los números 3, 8 y 5 el número generado aleatoriamente es el 385; si salieron 0, 7 y 1, el número aleatorio correspondiente es el 71; al 1 000 le corresponden los números 0, 0 y 0. Otro método es hacer un icosaedro, que es un poliedro de 20 caras, y numerar una cara y su opuesta con el mismo dígito. En la página 250 está el desarrollo de tal icosaedro.

También se usan las tablas de números aleatorios, que consisten en números de varios dígitos colocados aleatoriamente. Además, se decide arbitrariamente de qué renglón y columna se toman los números. Algunas calculadoras científicas tienen la tecla *Rnd* (abreviatura de *Random*, que significa aleatorio) y su función es dar un número aleatorio. Sin embargo, lo que ha venido a revolucionar el proceso es el uso de la computadora. En los paquetes de computación, viene la llamada hoja de cálculo, la cual trae una gran cantidad de funciones, entre ellas la generación de números aleatorios. En particular, si se escribe en una celda de la hoja de cálculo la instrucción =ENTERO(ALEATORIO()*30+1), al oprimir la tecla *Enter* la máquina escribe un número entero aleatorio del 1 al 30, ¡igual que si hubieses lanzado un dado de 30 caras!

Por otra parte, no siempre se puede numerar a los elementos de la población, en ocasiones ni siquiera se sabe cuál es el tamaño de la población y, sin embargo, las muestras sirven para calcular su valor aproximado.

I. Toño tiene una bolsa con muchas canicas blancas y quiere saber cuántas son. Se le ocurre extraer 10 canicas y ponerles una marca roja. Las regresa a la bolsa y las revuelve para que se distribuyan uniformemente.

a) Supongamos que al total de canicas en la bolsa lo representamos con la letra n. ¿Cómo representamos a la cantidad de canicas que no están marcadas? ______

b) Ahora, Toño extrae una muestra de tamaño 40 y ve que 2 canicas están marcadas. ¿Qué porcentaje de canicas está marcado? ______

c) Recordemos que tenemos 10 canicas marcadas de un total de n canicas. Si el porcentaje que calculado corresponde a 10 canicas, ¿cuánto vale n? ______

Así, sin mayor esfuerzo, hemos podido estimar la cantidad total de canicas mediante la probabilidad. Exactamente de esta manera los biólogos pueden estimar la cantidad de peces que hay en un lago: extraen una cierta cantidad, los marcan y los regresan al lago; dejan que pase por un tiempo para que se revuelvan con los demás; vuelven a extraer una determinada cantidad y cuentan los que están marcados. Lo que sigue es hacer una regla de tres en el papel. ¡Ingenioso!, ¿verdad? Sólo deben tener cuidado de no lastimar a los peces al separarlos, marcarlos y regresarlos al lago.

II. ¿Cuál es el porcentaje en el que se usa cada una de las 27 letras del alfabeto en el idioma español? Se puede saber tomando un libro como muestra y contando cuántas veces aparece cada letra. Con esos datos, se calculan los respectivos porcentajes. ¡Son muchas letras las que habría que contar! Pero eso también puede hacerlo la computadora.

Para la siguiente actividad conviene trabajar en equipos, disponer de una computadora que tenga procesador de texto y un archivo que tenga un escrito de más de 10 páginas.

Con el procesador de textos abran el archivo con el escrito del que van a contar sus letras. En el menú *Edición*, seleccionen la opción *Reemplazar* y pidan que busque a y la reemplace con a.

Ahora seleccionen *Reemplazar todos*. La computadora se pone a trabajar y al final entrega el reporte señalando cuántas letras a, sin acento, reemplazó. El documento quedó igual. ¿Por qué? ______

Hagan lo mismo para $á$, y contará las letras a que están acentuadas. Al sumar ambos valores, anoten las veces que se usó la letra a.

Continúen haciendo lo mismo para cada letra del alfabeto, considerando las vocales acentuadas (cuidado con la u, pues en español a veces lleva diéresis: $ü$). Por último, obtengan los porcentajes y habrán tenido una buena aproximación del porcentaje en que se emplea cada letra.

a) El valor así obtenido para las letras se obtuvo de una ______. ¿Cuál será la población? ______

b) Comparen sus porcentajes con los de otros equipos. ¿Son iguales para todas las letras? ______ En caso de haber diferencias, ¿cómo las explican? ______

______

c) Hagan una gráfica de barras donde se observen los porcentajes que obtuvieron.

Evaluación tipo Enlace

1. El largo de un rectángulo es 5 m mayor que su ancho y su área es de 126 m^2. Si representamos con x al ancho del rectángulo, ¿cuál es la ecuación que permite calcular la medida de sus lados?

a) $x^2 - 2x - 126 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 126 = 0$
c) $x^2 + 2x + 126 = 0$ **d)** $x^2 - 2x + 126 = 0$

2. Si un terreno rectangular tiene un área de 180 m^2 y perímetro igual a 54 m, la ecuación que permite calcular la medida de sus lados es:

a) $x(x + 54) - 180 = 0$ **b)** $x(x - 27) + 180 = 0$
c) $x(27 - x) - 180 = 0$ **d)** $x(x + 54) + 180 = 0$

3. La ecuación cuadrática cuyas soluciones son 2 y –2 es una de las siguientes:

a) $x^2 + 4 = 0$ **b)** $7x^2 - 28 = 0$ **c)** $4x^2 - 14 = 0$ **d)** $2x^2 + 28 = 0$

4. Señala la expresión VERDADERA.

a) Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados son iguales
b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos iguales
c) Dos triángulos son congruentes si tienen todos sus ángulos iguales
d) Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son iguales

5. Señala la opción FALSA.
En todo rectángulo:

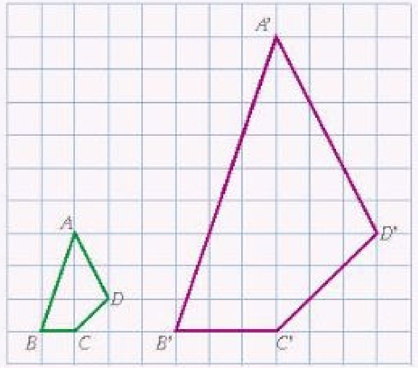
a) Hay sólo dos ejes de simetría **b)** Sus lados opuestos son iguales
c) Sus diagonales son iguales **d)** Sus diagonales son perpendiculares

6. Una fotografía de 4 cm × 6 cm se va a amplificar de manera que el largo mida 10 cm. ¿Cuánto medirá su ancho?

a) 6.67 cm **b)** 15 cm **c)** 12.15 cm **d)** 8 cm

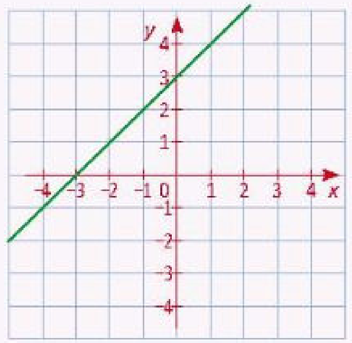
7. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el cuadrilátero $ABCD$ y el cuadrilátero $A'B'C'D'$?

a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) $\frac{1}{3}$
d) 4

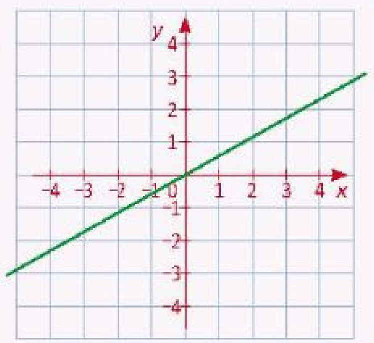


8. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una proporcionalidad directa entre las dos variables x y y?

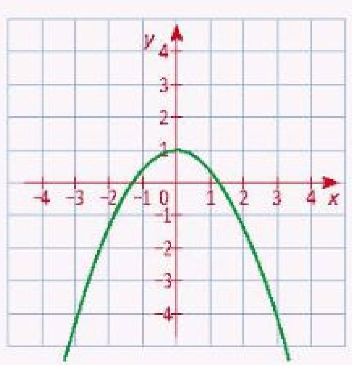
a)



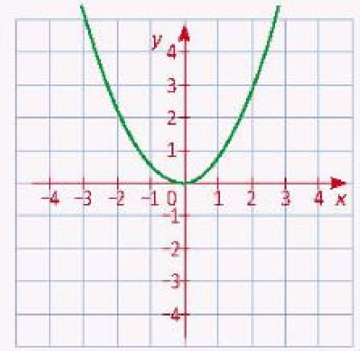
b)



c)



d)



9. Al lanzar dos dados comunes, con sus caras numeradas del 1 al 6, NO son excluyentes el evento *"Las dos caras muestran un número par"* y el evento

a) Al menos un dado cae 1
b) La suma de las caras es 7
c) El producto de las caras es menor que 4
d) La diferencia de las caras es 1

10. Se quiere saber qué porcentaje de la población con edad de 12 años o menos, aún no ha sido vacunada en una localidad de 25 000 habitantes, donde la cuarta parte de ellos tienen 12 años o menos. Para ello se diseña una muestra que encuestará a 10% de los niños de las edades ya mencionadas. Entonces, la cantidad de personas de la población a investigar y del tamaño de la muestra, respectivamente, es de:

a) 25 000 y 2 500 **b)** 25 000 y 6 250
c) 6 250 y 625 **d)** 625 y 10

Evaluación tipo PISA

Aspectos de la población de México

En el Censo de 2010, se sondearon varios aspectos: Educación y cultura; Población; Salud; Viviendas y urbanización. En cuanto a la población, se presentan en la siguiente tabla algunos datos proporcionados por el INEGI.

Estadística	Estados Unidos Mexicanos
Población	
Población total	112 336 538
Población total hombres	54 855 231
Población total mujeres	57 481 307
Relación (porcentual) hombres-mujeres	95.4
Hogares	28 159 373
Hogares con jefe hombre	21 243 167
Hogares con jefe mujer	6 916 206
Tamaño promedio de los hogares	3.9

1. ¿Qué porcentaje de la población era de sexo femenino? ________________.
¿Qué porcentaje de hombres había en 2010? ______________

2. ¿Cuál es la operación correcta que debe realizarse para obtener la proporción porcentual hombres-mujeres que se estipula en el cuarto renglón de datos?

a) $\frac{54\,855\,231}{112\,336\,538}$ b) $\frac{54\,855\,231}{57\,481\,307}$ c) $\frac{57\,481\,307}{54\,855\,231}$

3. Calcula ahora cuál es la proporción de hogares cuyo jefe de familia es hombre respecto de los que el jefe de familia es mujer. ___________

4. Para cada una de las siguientes afirmaciones señala con ✓ si es correcta y con ✗ si no lo es.

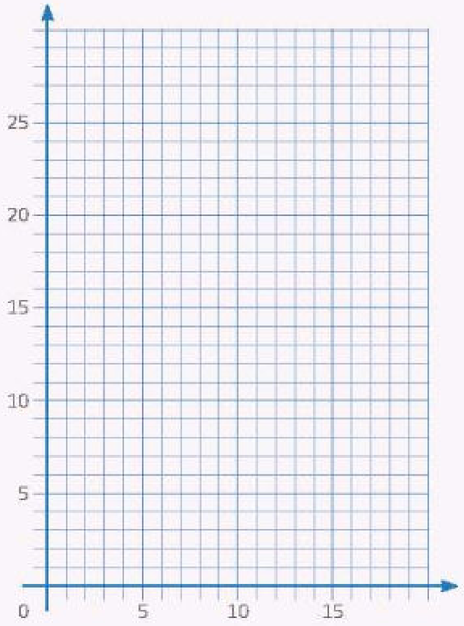
a) El tamaño promedio de los hogares se obtiene dividiendo la población total entre el número de hogares. ☐

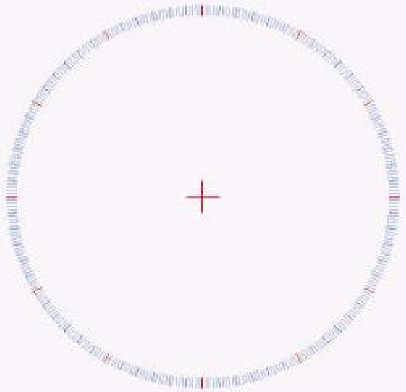
b) En México todos los hogares están conformados por cuatro personas, aproximadamente. ☐

c) Si en 2010 se seleccionara al azar un hogar mexicano, la probabilidad de que el jefe de familia fuera hombre sería de $\frac{21\,243\,167}{28\,159\,373} = 0.7544$ ☐

d) Si se mantuviera la misma proporción de hombres y mujeres, la probabilidad de que al seleccionar una persona al azar sea mujer es de 0.5117 ☐

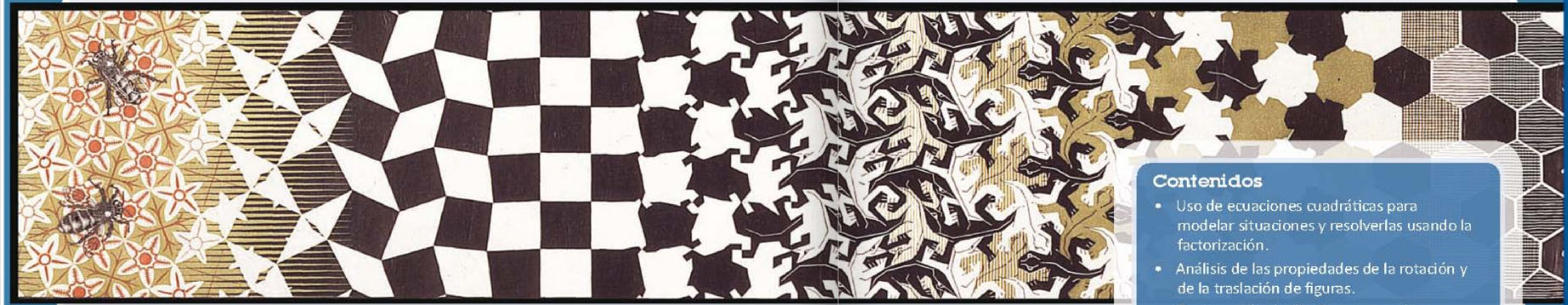
5. A continuación, construye una gráfica con los datos de la Población total y los porcentajes que calculaste en la pregunta 1. Puede ser una gráfica de barras o una circular.





Metamorfosis II es uno de los dibujos de Maurits Cornelius Escher (Holanda, 1898-1972) que causan mayor fascinación. En varios de sus dibujos y grabados, Escher parte de formas estrictamente geométricas, como cuadrados y hexágonos, para convertirlas gradualmente en figuras que reconocemos enseguida, como hombres, plantas, animales y edificios, generalmente recubriendo la totalidad del plano, sin huecos ni traslapes, hasta completar el ciclo, como en este fragmento, donde el estado final desemboca en el estado inicial. Escher aplica transformaciones geométricas como traslaciones, reflexiones y rotaciones a figuras regulares en el plano, a las que va deformando en figuras no congruentes entre sí.

BLOQUE II



Aprendizajes esperados:

- Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificar las propiedades que se conservan.
- Resolver problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Contenidos

- Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
- Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
- Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
- Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

LECCIÓN 29

Traducir al álgebra y factorizar

Técnicas para resolver ecuaciones cuadráticas

Organizados en equipo, analicen y resuelvan el siguiente problema.

I. A unos granjeros se les entregan 62 m de malla para cercar un terreno rectangular en el que deben construir su casa. ¿Cuáles son las medidas de largo y ancho que les proporciona el área más grande?

Una manera de resolver este problema es construir una tabla en la que se anoten distintos valores para el ancho y el largo del rectángulo y, en cada caso, calcular con tales valores el área resultante. Si el perímetro mide 62 m, ¿cuál es la suma del largo más el ancho del rectángulo? _______

En su cuaderno, construyan una tabla como la siguiente.

Ancho	Largo	Área

a) ¿Cuántas combinaciones con números enteros encontraron? _______

b) ¿Cuál combinación produjo el área más grande?

A = _______, L = _______

c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Si hay diferencias, expongan el procedimiento que emplearon y analicen cuál es el correcto.

II. Si se representa el ancho del rectángulo con x, una de las siguientes ecuaciones describe la relación entre los lados del terreno que hacen el perímetro de 62 m y la mayor área posible. Márquenla con ✓:

a) $x^2 + 31x + 240 = 0$ b) $x^2 - 31x - 240 = 0$

c) $x^2 - 31x + 240 = 0$ d) $x^2 + 31x - 240 = 0$

Comparen su respuesta con las de otros equipos, expliquen por escrito el razonamiento que hicieron y los pasos que siguieron. Al final, con ayuda de su profesor, expónganlo a todo el grupo.

III. La ecuación resultante de la actividad anterior es una ecuación de segundo grado, o cuadrática, en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la que $a = 1$ y b y c no son cero.

Supongan ahora que un terreno rectangular tiene perímetro de 34 m y su área mide 72 m². Representen con x el ancho y escriban los pasos necesarios para llegar a la ecuación correspondiente. ¿Cuánto mide de largo? _______

La ecuación obtenida debe ser una de las siguientes. Márquenla con ✓.

a) $x^2 + 17x + 72 = 0$ b) $x^2 - 17x - 72 = 0$

c) $x^2 + 17x - 72 = 0$ d) $x^2 - 17x + 72 = 0$

Las dimensiones del terreno son:

Ancho = _______ m, largo = _______ m.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y los pasos que siguieron para llegar a la ecuación. Si hay diferencias, con la coordinación de su profesor, discútanlas para que aclaren las dudas y corrijan errores.

Habiendo llegado a este punto, si se tienen los datos del perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, no debe haber dificultad para encontrar la ecuación y las longitudes de sus lados. La siguiente actividad plantea un problema más general.

IV. Un procedimiento para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ es el conocido como **factorización**. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

se puede re-escribir como el producto de dos binomios cuyo primer término es x y el segundo es un número:

$$(x + m)(x + n) = 0$$

y al multiplicar esos factores se tiene:

____

re-ordenando y agrupando:

$$x^2 + (m + n)x + mn = 0$$

así que m y n deben ser dos números tales que $m + n =$ _______ y $mn =$ _______.

En palabras, el problema se reduce a encontrar dos números cuya _______________ sea -8 y cuyo _______________ sea 12.

Tenemos entonces que, en este caso: $m = -6$ y $n = -2$.

En su cuaderno, sustituyan estos valores en $(x + m)(x + n) = 0$ y hagan las operaciones hasta llegar a la ecuación inicial, $x^2 - 8x + 12 = 0$. Comparen sus operaciones con las de otros compañeros y corrijan los posibles errores.

La factorización, paso a paso

Ventajas de la factorización

I. Cuando se tiene una ecuación de segundo grado como

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

en su expresión factorizada

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

las soluciones de la ecuación se tienen a la vista, gracias a un razonamiento muy sencillo:

Si el producto de dos factores es igual a cero, entonces ______ factores son ______, o al menos ______ de los factores es ______

¿Qué valor de x hace que el primer factor sea cero? ______

¿Qué valor de x hace que el segundo factor sea cero? ______

Así que los valores de x que hacen cierta a la ecuación factorizada y, por lo tanto, son soluciones de la ecuación inicial son:

$x_1 =$ ______ y $x_2 =$ ______

Sustituyan estos valores en la ecuación inicial, $x^2 + 5x + 6 = 0$, para comprobar que la hacen verdadera.

II. Factoricen las siguientes ecuaciones en su cuaderno, aplicando la técnica de suma y producto de la lección 4 (actividad **IV**).

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 7x + 6 = 0$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$

e) $x^2 - 5x - 36 = 0$

f) $x^2 + 13x + 40 = 0$

g) $x^2 - 7x - 30 = 0$

h) $x^2 - 12x + 32 = 0$

i) $x^2 + x - 56 = 0$

j) $x^2 + 95x - 500 = 0$

Una vez factorizada cada ecuación, tomen los valores de x que hacen cero los factores y sustitúyanlos en la ecuación original, para comprobar que son soluciones de dicha ecuación.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y si hay diferencias, discútanlas hasta que todos estén de acuerdo.

III. Después de haber hecho todos los ejercicios de la actividad anterior, organicen con otro equipo una competencia de resolución de diez ecuaciones de segundo grado, inventándolas ¡a partir de sus soluciones!

Por ejemplo, si quieren que las soluciones de una ecuación sean 4 y 9, escriban

$$(x - 4)(x - 9) = 0$$

hagan las operaciones

____

y en la hoja que entregarán al otro equipo escriban sólo la ecuación final

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Si quieren que ambas soluciones sean negativas, como –7 y –2, empiecen con

$$(x + 7)(x + 2) = 0$$

y, por supuesto, también podrán combinar una solución positiva y otra negativa, en cualquier orden.

Al terminar de plantear sus diez ecuaciones, intercambien su hoja con la del otro equipo y cuando ambos las hayan resuelto, recuperen su hoja y comprueben que el otro equipo las factorizó correctamente.

IV. Las ecuaciones en general y las cuadráticas en particular, pueden adoptar formas o expresiones diferentes, por ejemplo:

a) $0 = x^2 - 3x - 10$

b) $x^2 + x = 42$

c) $-28 - 3x + x^2 = 0$

d) $12 - x = x^2$

e) $x^2 - 3x = 0$

f) $0 = 5x - x^2$

En cualquier caso, tales ecuaciones pueden ser llevadas a la forma ya conocida de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, y aplicar la factorización.

Resuelvan las ecuaciones anteriores y comparen los resultados con los de otros compañeros, especialmente los de las dos últimas.

También puede suceder que algunas ecuaciones tengan el coeficiente de x^2 distinto de 1, y además que estén escritas en desorden, por ejemplo:

g) $3x^2 + 18x + 24 = 0$

h) $2x^2 - 6x - 108 = 0$

i) $20x + 4x^2 + 16 = 0$

j) $8x^2 = 8x + 16$

Para resolver estas ecuaciones, dividan todos los términos entre el coeficiente de x^2, ordénenlos y continúen con la factorización. Comparen sus resultados con los de otros compañeros y hagan los cambios necesarios para que todos coincidan en lo correcto.

La factorización aplicada

Resolución de problemas con factorización

Glosario

Bosquejar. Disponer o trabajar cualquier obra, pero sin concluirla.

En esta lección se incluyen algunos problemas o situaciones cuyo planteamiento y resolución requiere una ecuación de segundo grado, a fin de que apliques las técnicas aprendidas en las lecciones anteriores. Se **bosqueja** un procedimiento fragmentado de su resolución, aunque es muy recomendable resolverlos primero en tu cuaderno y sólo al final regresar aquí para llenar los espacios vacíos.

I. César es 3 años mayor que Daniel y la suma de los cuadrados de sus edades es 117. ¿Cuántos años tiene Daniel y cuántos tiene César?

Si x representa la edad de César, entonces __________ es la edad de Daniel. Los cuadrados de las edades deben sumar __________, así que:

$$x^2 + (\underline{\qquad})^2 = \underline{\qquad}$$
$$x^2 + x^2 - \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

agrupando términos semejantes e igualando a cero:

$$2x^2 - \underline{\qquad} + \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$
$$2x^2 - \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$

dividiendo entre 2:

$$x^2 - \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$

factorizando:

$$(x - \underline{\qquad})(x + \underline{\qquad}) = 0$$

por lo tanto, la edad de César es:

$$x = \underline{\qquad}$$

y la de Daniel es:

$$\underline{\qquad}$$

y al elevarlas al cuadrado y sumarlas, tenemos:

$$\underline{\qquad} + \underline{\qquad} = 117.$$

Si se toma el valor de x con base en el segundo factor, las edades resultan __________, lo cual no tiene sentido. Sin embargo, al elevarlas al cuadrado y sumarlas, se tiene:

$$\underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

lo cual también cumple con las condiciones del problema.

II. Comenten en el grupo lo siguiente:

> Una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. En ocasiones una de sus soluciones carece de sentido en el contexto del problema, y por lo tanto debe desecharse.

III. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 113. ¿Cuáles son esos números?

Sea x el menor de los dos números. Entonces,

$$x^2 + (\underline{\qquad})^2 = \underline{\qquad}$$
$$x^2 + x^2 + \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

agrupando términos semejantes e igualando a cero:

$$2x^2 + \underline{\qquad} + \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$
$$2x^2 + \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$

dividiendo entre 2:

$$x^2 + \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$

finalmente:

$$(x - \underline{\qquad})(x + \underline{\qquad}) = 0$$

por lo tanto:

$$x = \underline{\qquad}$$

Si se toma la solución del factor con el término menor, se tiene el menor de los números buscados, y viceversa.

IV. Un terreno rectangular mide 3 m más de largo que de ancho y su área es 40 m². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Designa con x la longitud del ancho del terreno. Entonces el largo es ________. Y su área es:

$$x(\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) = \underline{\qquad}$$

haciendo operaciones:

$$x^2 + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

igualando a cero:

$$x^2 + \underline{\qquad} - \underline{\qquad} = 0$$

y factorizando:

$$(x + \underline{\qquad})(x - \underline{\qquad}) = 0$$

La solución negativa debe desecharse porque la longitud no puede ser negativa, así que se toma su inverso. Se tiene entonces que:

Ancho = ________ m

Largo = ________ m

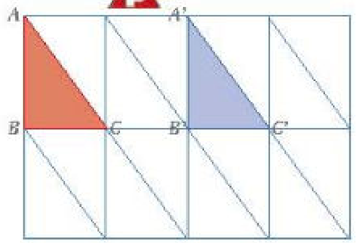
Compara el procedimiento que utilizaste en tu cuaderno con el que se esboza aquí, luego llena los espacios vacíos y finalmente compara tus respuestas con las de otros compañeros. En caso de que haya discrepancias o errores, discútanlos y corrijan lo necesario hasta que no haya dudas.

LECCIÓN 32

Traslación de figuras

Propiedades de la traslación de figuras

I. En el vitral de la izquierda, al triángulo *ABC* se le aplicó una **traslación** y se obtuvo el triángulo *A'B'C'*.



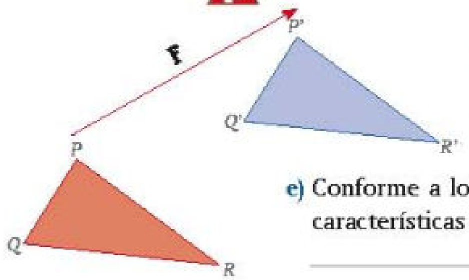
a) ¿Cómo son, en dimensiones, los lados correspondientes del triángulo *ABC* y del triángulo *A'B'C'*? ____________

b) ¿Cómo son, en dimensiones, los ángulos correspondientes de ambos triángulos? ____________

c) De acuerdo con las respuestas en **a)** y **b)**, ¿cómo son los triángulos *ABC* y *A'B'C'*? ____________

d) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

II. En la figura de la izquierda, el triángulo *P'Q'R'* es el resultado de la **traslación** del triángulo *PQR* determinada por el tamaño y la dirección de la flecha **F**.



a) Tracen con líneas punteadas los segmentos *PP'*, *QQ'* y *RR'*.

b) Verifiquen que los segmentos *PP'*, *QQ'* y *RR'* miden lo mismo.

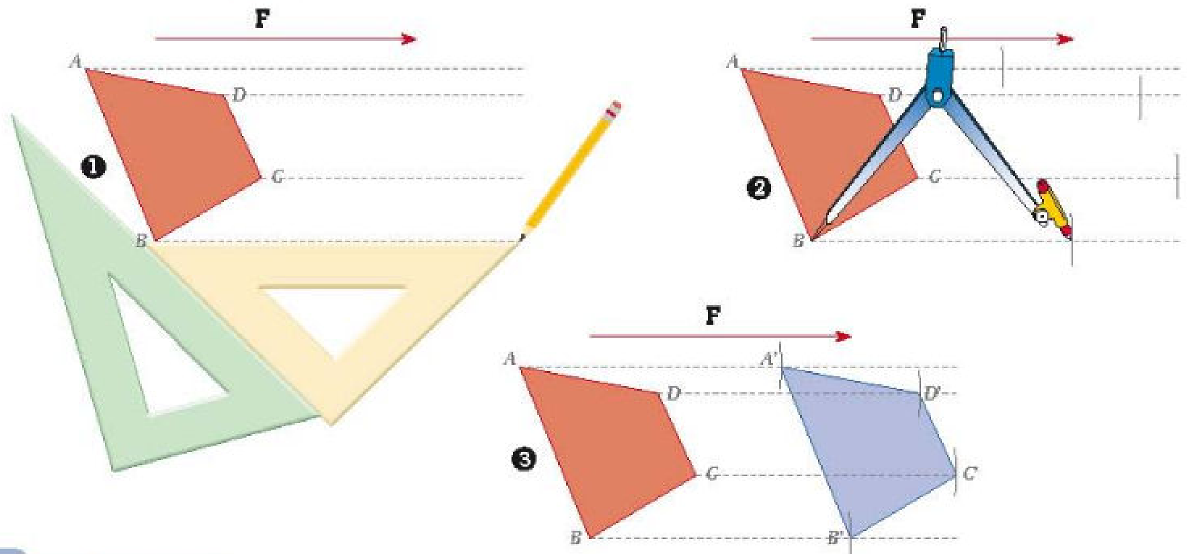
c) Verifiquen también que los segmentos *PP'*, *QQ'* y *RR'* son paralelos.

d) Comparen la medida de la flecha **F** con la de estos segmentos. ¿Cómo son? ____________

e) Conforme a los incisos **b)**, **c)** y **d)**, y con ayuda de su maestro, describan las características de una traslación. ____________

____

III. Usando las características descritas en la actividad anterior, enseguida se muestra cómo realizar la traslación de un cuadrilátiero *ABCD* determinada por la flecha **F**.



Tomando como base los trazos anteriores:

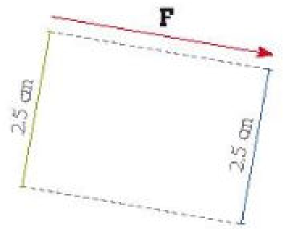
a) Describan en su cuaderno cómo realizar la traslación de una figura.

b) Tracen en su cuaderno un triángulo escaleno y un cuadrilátero irregular. En cada caso tracen una flecha del tamaño y dirección que decidan y con su juego de geometría realicen la traslación correspondiente de cada figura.

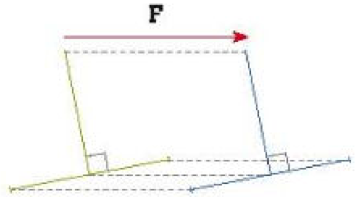
IV. Hay propiedades de las figuras geométricas que no cambian al transformarlas mediante una traslación. A estas propiedades se les llama **invariantes**.

¿Qué propiedades de las figuras geométricas son invariantes cuando las transformamos mediante una traslación? Para responder a esta pregunta, realicen las traslaciones que faltan en las siguientes figuras.

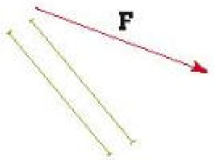
a) Longitud de segmentos



b) Perpendicularidad de rectas

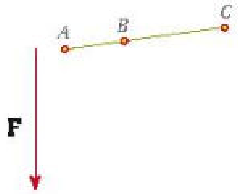


c) Paralelismo de rectas



d) Medida y sentido de los ángulos

e) Colinealidad de puntos



f) Comenten con su compañero si la propiedad considerada en cada caso es una propiedad que se conserva o no se conserva en una traslación.

g) Unan con una línea cada palabra de la izquierda con la propiedad que se conserva o no se conserva al trazar la imagen de una figura geométrica mediante una traslación.

Invariante

Variante

- Longitud de segmentos
- Perpendicularidad de rectas
- Paralelismo de rectas
- Medida de ángulos
- Colinealidad de puntos
- Sentido de los ángulos

h) En resumen, las propiedades invariantes de una traslación son: ____________

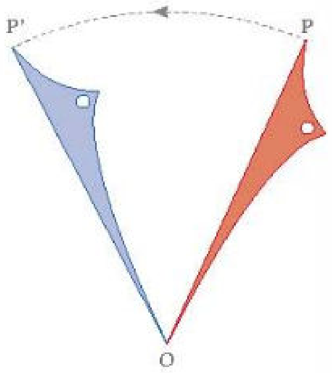
____

V. Comparen sus respuestas de todas las actividades de esta lección con las de otras parejas de compañeros. Si hay diferencias, analicen las razones y corrijan, si es necesario.

Rotación de figuras (1)

Cómo trazar la traslación de figuras

En el entorno en que vivimos ocurren muchos movimientos de rotación, por ejemplo, el movimiento de rotación de la Tierra sobre su eje, el giro de las ruedas de un coche y el de las manecillas de un reloj. En la siguiente ilustración se muestra cómo se transforma una figura mediante una rotación con centro en un punto O.

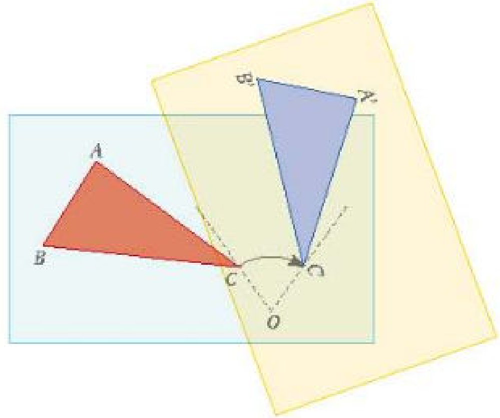


I. Para mostrar físicamente cómo se generan las rotaciones se requiere:

- Una hoja de papel blanco
- Una hoja de plástico transparente (o de papel albanene)
- Un alfiler o un clip

Con estos materiales:

a) Tracen en la hoja de papel un $\triangle ABC$ y marquen un punto O externo.
b) Sobrepongan la hoja de plástico sobre la de papel y en ella copien el $\triangle ABC$ y el punto O.
c) Inserten el alfiler en el punto O, de manera que el punto O quede fijo.
d) Giren un cierto ángulo la hoja de plástico para obtener el $\triangle A'B'C'$.



El $\triangle A'B'C'$ es el resultado de la rotación, cuyo ángulo es el que eligieron y centro de rotación el punto O.

e) Prueben con varios ángulos, por ejemplo 90°, 60°, 45° y 30°. Para estos ángulos pueden usar sus escuadras.
f) Conforme a las indicaciones en c) y d), y con ayuda de su maestro, describan las características de una rotación. ______________________

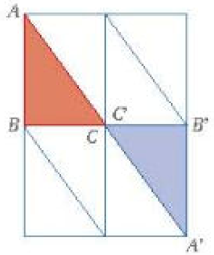
____

Glosario

Papel albanene. Es utilizado generalmente para planos en arquitectura e ingeniería. Tambien es utilizado en manualidades y tarjeteria española. Existen diferentes grosores.

II. En el vitral de la derecha, al $\triangle ABC$ se le aplicó una rotación y se obtuvo el $\triangle A'B'C'$

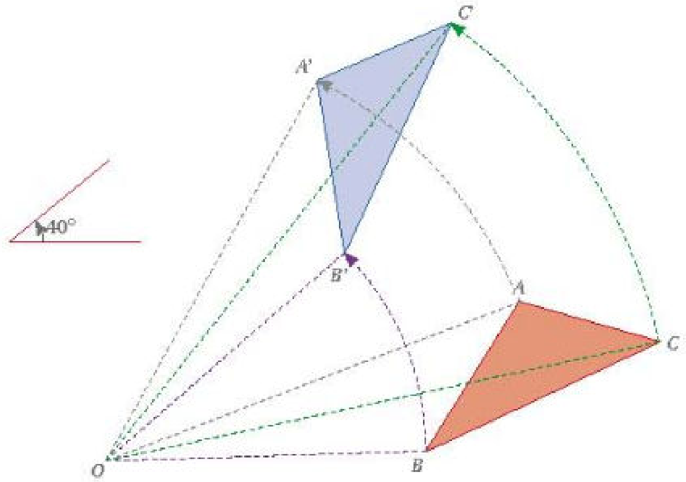
a) ¿Cuál fue el centro de rotación? ______________
b) ¿Cuál fue el ángulo de rotación? ______________
c) Copien este trazo en su cuaderno y marquen otros pares de triángulos, tales que uno de ellos se transforma en el otro mediante este mismo ángulo.
d) Compartan sus respuestas con las de otras parejas de compañeros, den argumentos para justificarlas y lleguen a un acuerdo entre todo el grupo.



III. En la ilustración que sigue, el $\triangle A'B'C'$ es resultado de la rotación del $\triangle ABC$. El centro de rotación es el punto O y el ángulo de rotación es 40°.
Para identificar cómo giró cada vértice del triángulo ABC, los lados del ángulo de rotación de los vértices correspondientes están punteados del mismo color.

Glosario

Vitral. Arreglo elaborado con vidrios de colores, pintados o recubiertos con esmaltes, que se ensamblan mediante varillas de plomo.

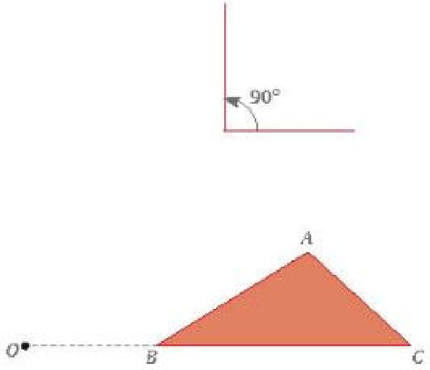


a) Describan en su cuaderno cómo realizar la rotación de un punto P, cuyo centro sea el punto O y ángulo de 75°.
b) Expongan su descripción ante los miembros del grupo, si encuentran que está incompleta o tiene errores, con ayuda de su maestro lleguen a un acuerdo sobre esta descripción.

IV. Con centro en el punto O, tracen el $\triangle A'B'C'$ aplicando una rotación de 90° al $\triangle ABC$ de la derecha.

a) Puesto que los puntos B y C están alineados con O, ¿también los puntos B' y C' deben estar alineados con O? ________ ¿Por qué? ______________

____
b) ¿Qué ángulo forman los lados correspondientes? ______________
c) Contrasten sus respuestas con las de otras parejas del grupo y corrijan, si es necesario.

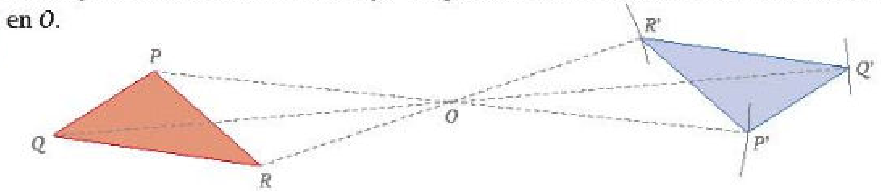


LECCIÓN 34

Rotación de figuras (2)

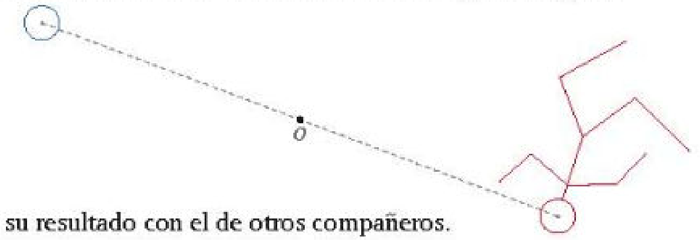
Propiedades de la rotación de figuras

I. El $\triangle PQR$ se transformó en el $\triangle P'Q'R'$ al aplicarle una rotación de 180° con centro en O.



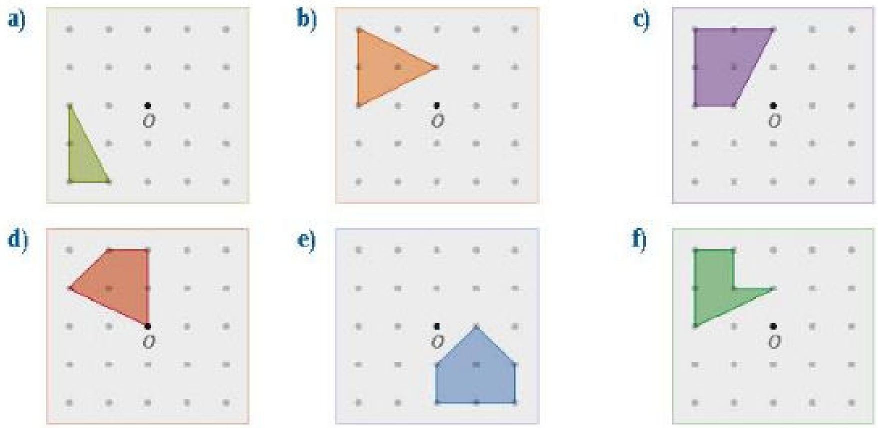
A una rotación de 180° se le llama **simetría central**.

a) Apliquen una rotación de 180° con centro en O a la siguiente figura:



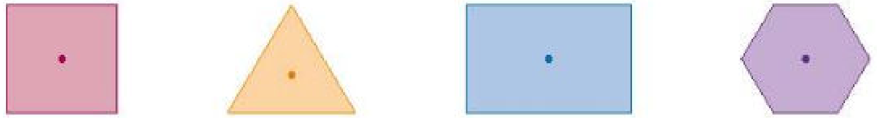
b) Comparen su resultado con el de otros compañeros.

II. En los siguientes geoplanos apliquen a cada figura una rotación de 180° con centro en el punto O.



g) Comparen sus resultados con los de otras parejas de compañeros. Si hay diferencia analicen por qué y, si es el caso, corrijan.

III. Consideren que en cada una de las siguientes figuras el punto marcado es el centro de rotación.



a) Analicen si todas las figuras cumplen con tener simetría central.

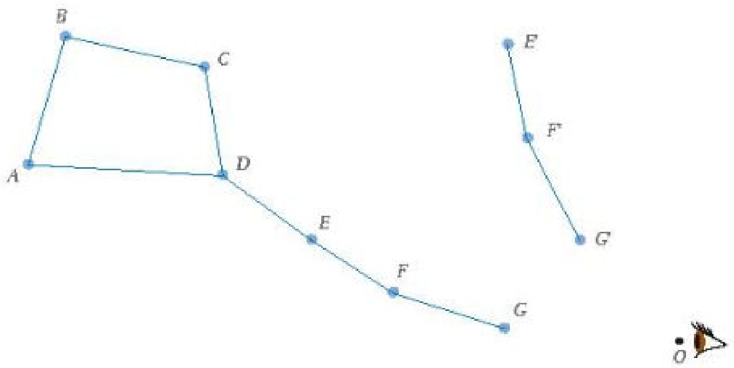
b) ¿Cuál es el ángulo mínimo que se debe rotar cada figura para que coincida con ella misma en todas sus partes?

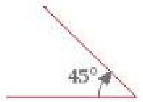
Cuadrado: ________________ Triángulo equilátero: ________________

Rectángulo: ________________ Hexágono regular: ________________

c) Copien cada figura en una hoja de papel. Colóquenla encima de la figura del libro sujetándola con un alfiler y gírenla para verificar su respuesta.

IV. Los puntos A, B, C, D, E, F y G representan las estrellas que forman la constelación de la Osa Mayor. Una ocasión, un observador mira la constelación. Desde el mismo lugar, después de determinado tiempo la ve rotada 45° con respecto a la primera vez. Consideren el punto O como centro de observación. Ya se han localizado los puntos E', F' y G'. Localicen los que faltan y marquen la nueva posición de la Osa Mayor.





Comparen su resultado con otras parejas del grupo. Si hay diferencias analicen la razón y lleguen a un acuerdo, de manera que todos los trazos coincidan.

V. ¿Qué propiedades de las figuras geométricas se conservan al transformarlas mediante una rotación?

Para investigarlo, formen equipos de cinco integrantes. Cada uno trace en una hoja tamaño carta una rotación que ilustre una de las propiedades (investiguen las mismas propiedades que se consideraron para el caso de las traslaciones, incluso pueden usar las mismas figuras originales de la página 85). Para que su trazo sea más claro y atractivo, para cada punto que transformen pueden trazar de un mismo color ambos lados del ángulo. En cada caso anoten si la propiedad considerada se conserva o no se conserva mediante una rotación. Al final, coloquen todas las hojas del equipo en una cartulina y expónganla ante los demás equipos del grupo.

LECCIÓN 35

Dos transformaciones sucesivas

Aplicación de dos transformaciones a una figura

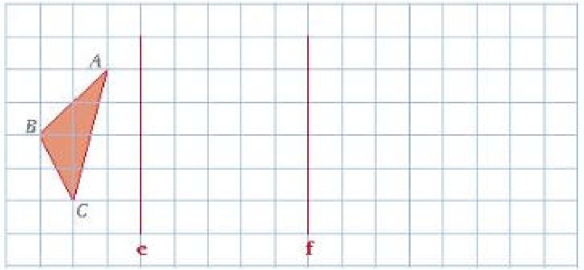
Una transformación convierte al $\triangle ABC$ en el $\triangle A'B'C'$. Otra transforma al $\triangle A'B'C'$ en el $\triangle A''B''C''$. ¿Habrá una transformación que convierta directamente al $\triangle ABC$ en el $\triangle A''B''C''$?

$$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A'B'C' \longrightarrow \triangle A''B''C''$$

?

Antes de hacer las actividades de esta lección investiguen si hay una transformación que tenga el mismo efecto que dos traslaciones, dos reflexiones y dos rotaciones.

I. En la siguiente ilustración apliquen al $\triangle ABC$ la reflexión determinada por el eje de reflexión **e**, para obtener el $\triangle A'B'C'$. Luego, al $\triangle A'B'C'$ le aplican la reflexión determinada por el eje **f**, para obtener el $\triangle A''B''C''$.



a) Por su dirección, ¿cómo son los ejes **e** y **f**?

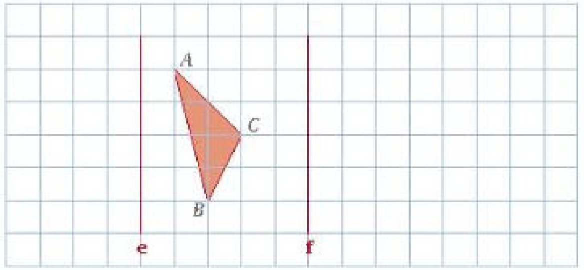
____

b) ¿Qué distancia hay entre los ejes **e** y **f**? _______

c) ¿Qué distancia hay entre A y A'', B y B'', C y C''? _______________

d) ¿Qué transformación aplicada sólo una vez convierte al $\triangle ABC$ en el $\triangle A''B''C''$? _______

____

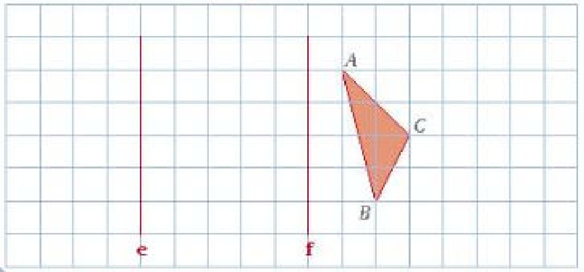


II. Ahora coloquemos el $\triangle ABC$ entre los ejes **e** y **f**. Apliquen al $\triangle ABC$ primero la reflexión **e** y a la figura que resulte le aplican la reflexión **f**.

¿Qué transformación aplicada sólo una vez convierte el $\triangle ABC$ en el $\triangle A''B''C''$? _______

____

III. Prueben ahora colocando el $\triangle ABC$ a la derecha del eje **f**. Apliquen primero la reflexión **f** y luego la reflexión **e**.



a) ¿Qué transformación aplicada sólo una vez convierte al $\triangle ABC$ en el $\triangle A''B''C''$? _______

a) En equipo, traten de obtener una conclusión de las actividades **I**, **II** y **III** para responder a la pregunta: ¿Cuál es el resultado de aplicar a una figura dos reflexiones en ejes paralelos?

____

____

IV. Investiguen si hay una transformación que haga lo mismo que dos reflexiones en ejes que se cortan.

a) Apliquen al $\triangle ABC$ la reflexión en el eje **e** para obtener el $\triangle A'B'C'$.

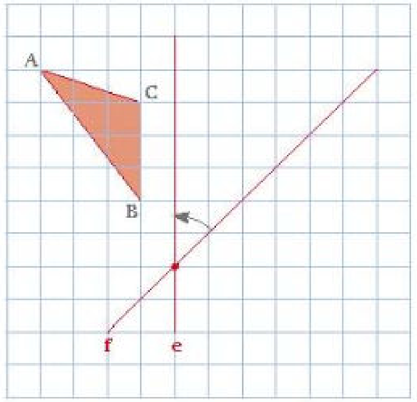
b) Apliquen al $\triangle A'B'C'$ la reflexión con eje **f** para obtener el $\triangle A''B''C''$.

c) La transformación que convierte al $\triangle ABC$ en el $\triangle A''B''C''$ ¿podría ser una reflexión? _______. Argumenten su respuesta. _______________

____

d) ¿Podría ser una traslación? _______. Argumenten su respuesta. _______________

e) ¿Podría ser una rotación? _______. Argumenten su respuesta. _______________



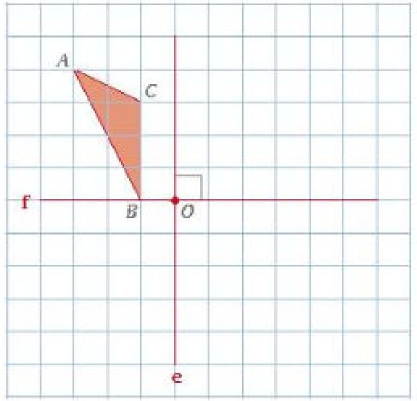
f) Exploren las tres posibilidades trazando en papel cuadriculado otros ejemplos. En cada caso propongan una conjetura y traten de verificar su veracidad o falsedad.

V. Investiguen si hay una transformación con la que se obtenga el mismo resultado que al aplicar dos reflexiones en ejes que se cortan perpendicularmente.

a) Repitan los pasos **a)** y **b)** de la actividad **IV**.

b) ¿Qué transformación convierte al $\triangle ABC$ en el triángulo $A''B''C''$? _______________.

Como ayuda para proponer una respuesta, pueden trazar los segmentos AA'', BB'' y CC''.



VI. Contrasten sus respuestas de las actividades de esta lección con otros equipos y con ayuda de su maestro escriban en su cuaderno sus conclusiones sobre:

a) El resultado de aplicar sucesivamente dos traslaciones.

b) El resultado de aplicar sucesivamente dos reflexiones:

- En ejes paralelos
- En ejes que se cortan

c) El resultado de aplicar sucesivamente dos rotaciones con el mismo centro.

LECCIÓN 36

Identificación de transformaciones

Reconocimiento de transformaciones aplicadas a una figura

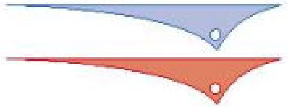
I. En el programa de computadora para diseño editorial con el que fue editado este libro, el menú de *Transformaciones* incluye comandos que nos permiten aplicar a una figura las transformaciones que hemos estudiado. Por ejemplo, a partir de la siguiente figura original, se pueden obtener las figuras que aparecen enseguida.

Escriban debajo de cada figura la transformación geométrica que se aplicó y sus características.

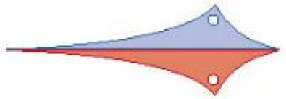
a)

b)

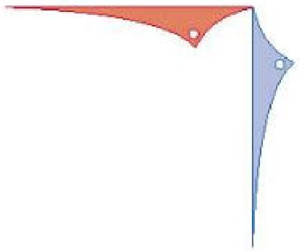
c)



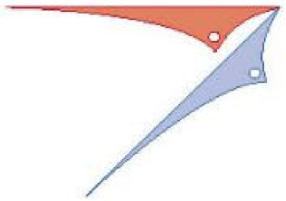
d)



e)

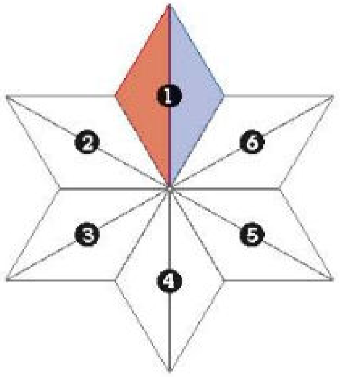


f)



g)

II. La estrella de la derecha está construida por varias figuras básicas.

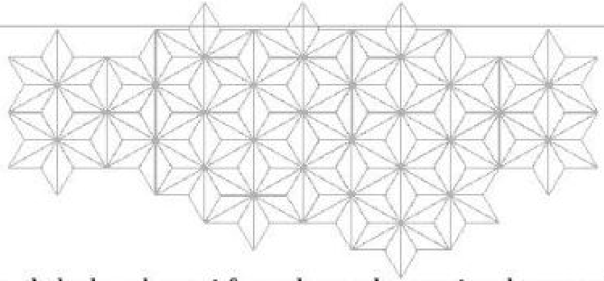


a) Considera que primero se trazó el triángulo rojo. ¿Cómo se obtuvo el triángulo azul a partir del triángulo rojo? ______

b) ¿Cómo se obtuvieron los rombos ❷, ❸, ❹, ❺ y ❻ a partir del rombo ❶? ______

c) Señala varias maneras de obtener el rombo ❹ a partir del rombo ❶.

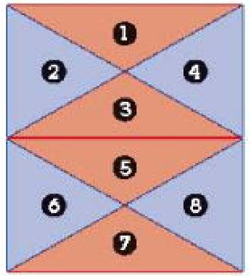
c) ¿Cómo obtienes el siguiente teselado de estrellas? ______



Glosario

Teselado
Recubrimiento del plano con figuras repetidas sin traslapes ni huecos.

III. La figura de la derecha está formada por dos rectángulos y sus diagonales.



a) ¿Cómo se transforma el triángulo ❶ en el triángulo ❼ usando una sola transformación? ______

b) ¿Cómo se transforma el triángulo ❶ en el triángulo ❼ usando exactamente dos transformaciones? ______

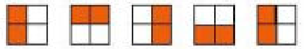
c) ¿Cómo se transforma el triángulo ❶ en el triángulo ❺? ______

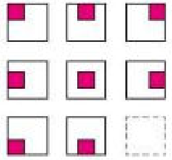
d) ¿Cómo se transforma el triángulo ❷ en el triángulo ❽? ______

IV. En muchas de las pruebas que se aplican a las personas para medir su inteligencia se hacen preguntas para que el examinado reconozca la transformación o transformaciones que se aplican a una figura.

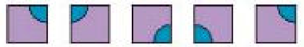
Escriban debajo de cada serie de figuras la transformación o transformaciones que llevan de una figura a la siguiente y tracen la figura que sigue.

a)  ____

b)  ____

c) 

d)  ____

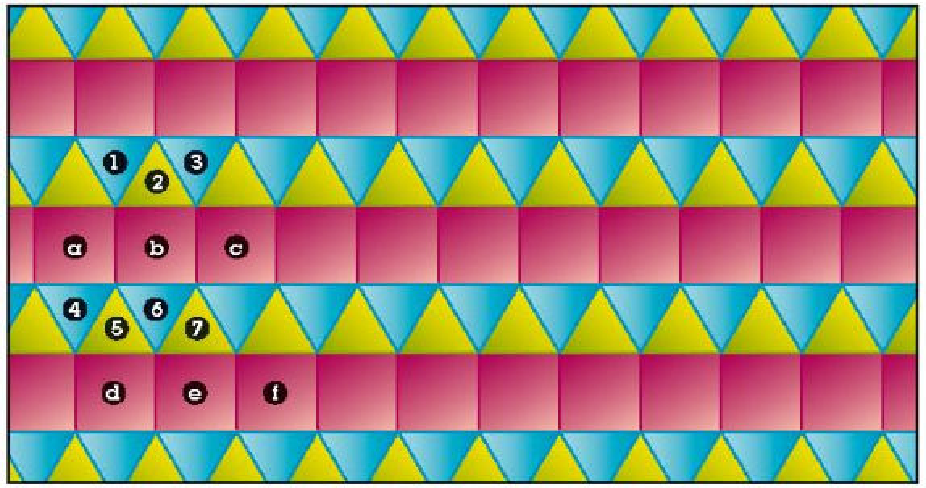
e)  ____

V. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con otros compañeros. Si hay diferencias analicen las razones y corrijan si es necesario.

Diseños que combinan varias transformaciones

Identificación de transformaciones aplicadas en un teselado

I. Analicen el teselado, luego contesten las preguntas que siguen.



a) Anoten qué transformación o transformaciones se aplicaron al triángulo 1 para obtener:

- el triángulo 3 ____________________
- el triángulo 2 ____________________
- el triángulo 5 ____________________
- el triángulo 6 ____________________
- el triángulo 7 ____________________

b) Anoten qué transformación o transformaciones se aplicaron al cuadrado a para obtener:

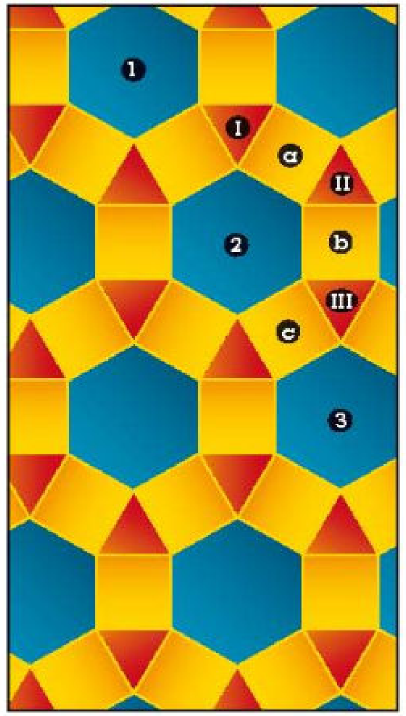
- el cuadrado b ____________________
- el cuadrado c ____________________
- el cuadrado d ____________________
- el cuadrado e ____________________

c) Marquen el centro de simetría de algunos triángulos y de algunos cuadrados que no aparezcan marcados con letras o números en el teselado.

d) Tracen y marquen con **r** el eje de simetría de los triángulos 4 y 6. Tracen y marquen con s el eje de simetría de los cuadrados d y f.

e) Comparen sus respuestas con otras parejas de compañeros. Si no coinciden, analicen las razones y, si es el caso, corrijan lo necesario.

II. Analicen el teselado de la derecha compuesto por hexágonos, cuadrados y triángulos.

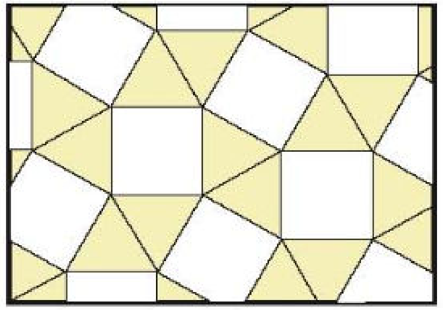


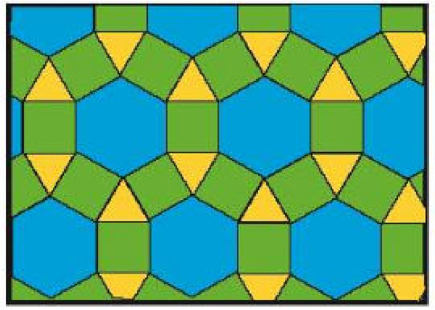
a) Anoten qué transformación o transformaciones convirtieron una figura en la otra y describan sus características:

- 1 en 2 ____________________
- 2 en 3 ____________________
- 1 en 3 ____________________
- I en II ____________________
- I en III ____________________
- a en b ____________________
- a en c ____________________

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si no coinciden analicen por qué y corrijan lo necesario.

III. Analicen los siguientes teselados, luego redacten en su cuaderno preguntas como las de las actividades **I** y **II**. Intercambien estas preguntas con otro equipo. Cuando ambos equipos hayan contestado las preguntas, vuelvan a intercambiar para verificar que el otro equipo contestó todo correctamente. Para terminar, comenten entre todo el grupo las preguntas y respuestas que provocaron mayor discusión.





IV. Elijan uno de los siguientes grupos de figuras para hacer el diseño de un teselado:

a) Hexágono regular y triángulo equilátero
b) Cuadrado y triángulo equilátero
c) Hexágono, cuadrado y triángulo equilátero

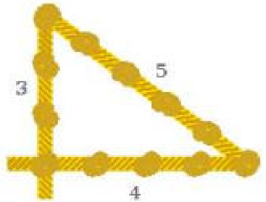
En todos los casos los lados de las figuras deben medir lo mismo. Hagan sus trazos en una hoja carta, añádanles color y hagan una exposición con los diseños de todos los equipos del grupo.

Cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo (1)

Comparación de sus áreas

I. En esta lección iniciaremos el estudio de la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, conocida como **teorema de Pitágoras**.

Para marcar los campos de cultivo, los antiguos topógrafos egipcios usaron el hecho de que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades es un triángulo rectángulo, como el de la cuerda con nudos que se ilustra a la derecha.



En la actualidad, para trazar ángulos rectos, nuestros albañiles usan un triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10 metros cuando construyen los cimientos de una casa.

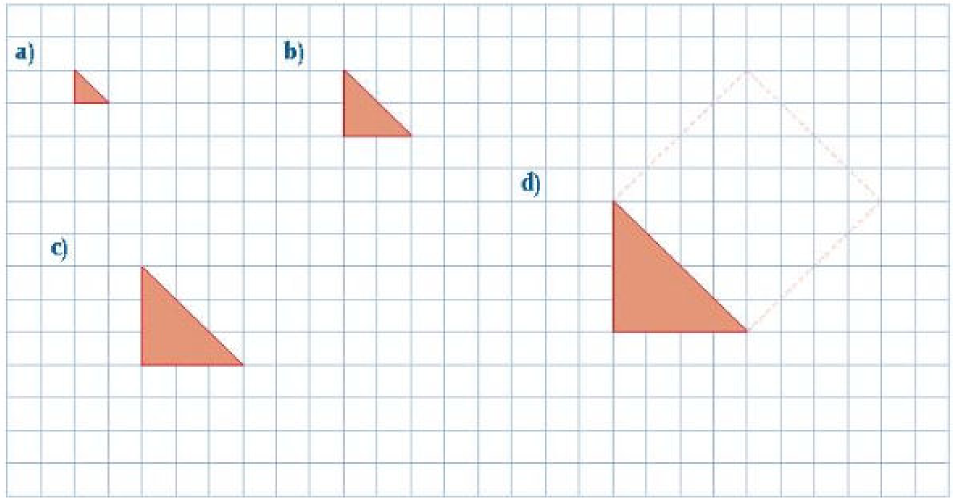
a) En una hoja blanca construyan el triángulo de lados 6, 8 y 10 unidades y verifiquen que efectivamente es un triángulo rectángulo.

b) ¿Qué relación hay entre los lados del triángulo rectángulo que usaban los egipcios y el que usan nuestros albañiles? ____________________

c) ¿Consideran que si los tres lados de un triángulo rectángulo se multiplican por 3, 4 o 5, el triángulo resultante también será rectángulo? _____ Para investigarlo tracen en su cuaderno cuadriculado varios ejemplos.

d) Comparen sus respuestas con las de otras parejas del grupo y saquen una conclusión de la respuesta que dieron en c).

II. Los siguientes triángulos rectángulos son isósceles. Apoyándose en la cuadrícula construyan en cada caso un cuadrado sobre sus catetos y un cuadrado sobre su hipotenusa, luego completen la tabla de la siguiente página.



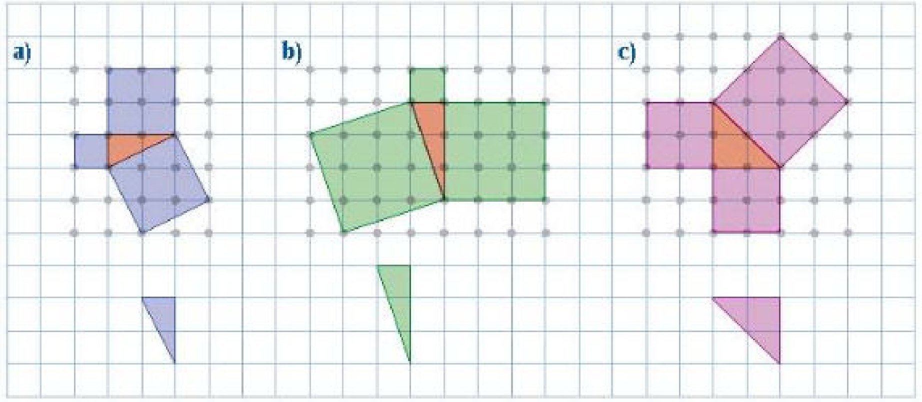
	Área del cuadrado sobre la hipotenusa	Área de los cuadrados sobre los catetos
En el triángulo a)		
En el triángulo b)		
En el triángulo c)		
En el triángulo d)		

e) En cada caso, ¿cómo es el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa comparado con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos? ______

f) ¿Qué conclusión obtienen de esta actividad? ____________________

g) Contrasten sus respuestas con las de otras parejas. Si hay diferencias analicen el porqué y corrijan.

III. Sin usar fórmulas para calcular áreas, comparen en cada uno de los siguientes casos el área construida sobre la hipotenusa de cada triángulo rectángulo con la suma de las áreas construidas sobre los catetos.



Sugerencia: En cada caso dividan el cuadrado construido sobre la hipotenusa en triángulos como el que está debajo de cada figura.

a) Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa: ______
- Suma de las áreas construidas sobre los catetos: ______

b) Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa: ______
- Suma de las áreas construidas sobre los catetos: ______

c) Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa: ______
- Suma de las áreas construidas sobre los catetos: ______

d) ¿Qué conclusión sacan de los resultados que obtuvieron en a), b) y c)? ______

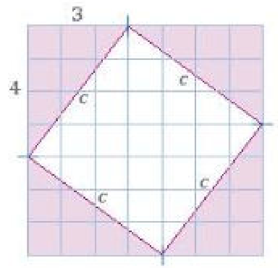
e) Comenten esta conclusión con otras parejas de compañeros y con ayuda de su maestro establezcan una conclusión en común. ____________________

LECCIÓN 39

Cuadrados en los lados de un triángulo rectángulo (2)

Comprobaciones gráficas del teorema de Pitágoras

I. Para determinar la relación entre los tres lados de un triángulo, en la siguiente ilustración se muestra un cuadrado exterior de 7 unidades por lado, dividido en cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado interior.



Para encontrar cuánto mide el lado c del cuadrado interior contesten las siguientes preguntas:

a) Área del cuadrado exterior: ________

b) Área de cada uno de los cuatro triángulos: ________

c) Área de los cuatro triángulos: ________

d) Área del cuadrado interior: ________

e) Si conocemos el área del cuadrado interior, ¿cómo calculamos la medida de su lado? ________________

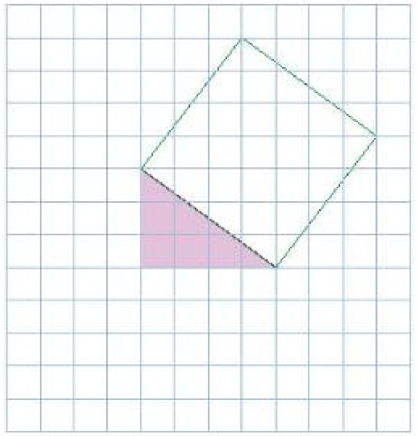
f) Medida del lado del cuadrado interior: ________

g) ¿Qué relación encuentran entre el lado del cuadrado interior y los lados de cada triángulo? ________

h) Escriban una conclusión de esta actividad y compártanla con otros equipos. ________________________________

____

II. Tomando como base la figura de la actividad **I**, en una hoja cuadriculada copien uno de los triángulos construidos en uno de los vértices del cuadrado exterior, por ejemplo el de abajo a la izquierda, y tendrán una figura como la siguiente:



Ahora construyan un cuadrado sobre cada uno de los catetos del triángulo rectángulo.

a) ¿Qué relación encuentran entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos respecto del cuadrado construido sobre la hipotenusa? ________________

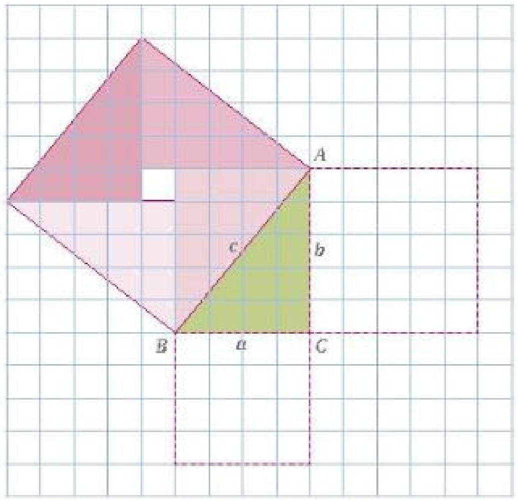
____

b) Confronten su respuesta con las de los demás compañeros.

III. Otra manera más de investigar la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es la siguiente.

A partir de un triángulo rectángulo ABC compararemos dos cantidades:

- El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa c.
- La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos a y b.



El cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC está dividido en cuatro triángulos y un pequeño cuadrado interior.

a) ¿Cuál es el área de cada triángulo? ________

b) ¿Cuál es el área de los cuatro triángulos? ________

c) ¿Cuál es el área del cuadrado interior? ________

d) Conforme a las respuestas en **b)** y **c)**, ¿cuál es el área total del cuadrado construido sobre la hipotenusa del $\triangle ABC$? ________

Por otra parte,

e) ¿Cuál es el área del cuadrado sobre el cateto a? ________

f) ¿Cuál es el área del cuadrado sobre el cateto b? ________

g) ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos a y b? ________

h) Conforme a las respuestas en **d)** y **g)**, y con ayuda de su maestro, obtengan una conclusión grupal de esta actividad.

IV. Para mostrar físicamente el teorema de Pitágoras, cada pareja trace en una hoja de cartulina un triángulo rectángulo ABC con las medidas que decidan.

a) Construyan un cuadrado sobre cada uno de los lados del $\triangle ABC$.

b) En el cuadrado construido sobre el cateto BC marquen el centro O.

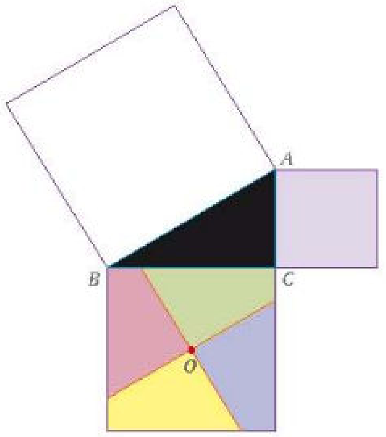
c) Tracen una paralela a la hipotenusa que pase por el punto O.

d) Tracen una perpendicular a la hipotenusa que pase por el punto O.

e) Iluminen de diferentes colores y recorten las cuatro partes en las que queda dividido el cuadrado sobre el cateto BC y el cuadrado sobre el cateto AC.

f) Con estas cinco piezas armen el rompecabezas para cubrir el cuadrado sobre la hipotenusa AB.

g) Con apoyo de su maestro resuman el resultado de esta actividad.

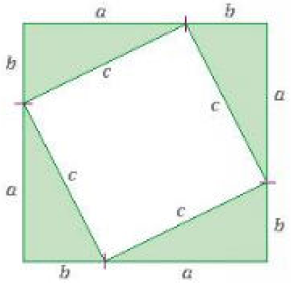


LECCIÓN 40

Explicitación del teorema de Pitágoras

Comprobaciones del teorema de Pitágoras usando recursos del álgebra

I. En la actividad **I** de la lección 39 trazamos un cuadrado exterior de 7 unidades por lado y cada lado dividido en 3 y 4 unidades. Con estos puntos como vértices trazamos cuatro triángulos rectángulos, con lo que el cuadrado original quedó dividido en cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado interior de lado c. Con esta figura como base encontramos una relación entre la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo.



¿Será válida esta relación para cualquier triángulo rectángulo?

Para contestar esta pregunta, trazamos un cuadrado de lados $a + b$ y un cuadrado interior de lado c.

Para encontrar la relación entre los lados a, b y c de cada triángulo, contestamos lo siguiente:

a) Área de cada uno de los triángulos de lados a, b y c ________

b) Suma de las áreas de los cuatro triángulos de lados a, b y c ________

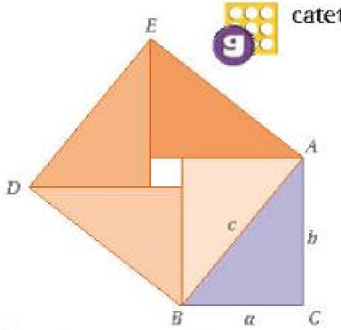
c) Área del cuadrado exterior ________

d) Área del cuadrado interior ________

e) Escriban una expresión que compare el área del cuadrado de lado $a + b$ con las suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado interior y simplifíquenla. ________________________________

f) Con ayuda de su maestro, escriban una conclusión de esta actividad. ________________________________

II. En la actividad **III** de la lección 39 trazamos un triángulo rectángulo ABC con catetos de 4 y 5 unidades y sobre la hipotenusa c construimos un cuadrado.



La relación que encontramos para un triángulo de catetos 4 y 5, ¿será válida para cualquier triángulo rectángulo?

Para saberlo, trazamos:

- Un triángulo rectángulo ABC con catetos a y b e hipotenusa c.
- Un cuadrado sobre la hipotenusa c.
- Paralelas al cateto a que pasen por los vértices A y D.
- Paralelas al cateto b que pasen por los vértices B y E.

a) Explica a un compañero por qué el cuadrado interior mide $b - a$ por lado.

En el cuadrado $ABDE$:

b) Área de cada uno de los cuatro triángulos: ________

c) Suma de las áreas de los cuatro triángulos (simplificada): ________

d) Área del cuadrado interior: ________________

e) De acuerdo con las respuestas en **c)** y **d)**, escriban una expresión para el área del cuadrado $ABDE$ (simplificada): ________________

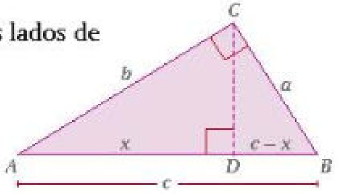
Por otra parte,

f) Escriban, en términos de c, una expresión para el área del cuadrado $ABDE$: ______

g) Escriban una expresión que compare el área del cuadrado $ABDE$ obtenida en **e)** con la obtenida en **f)**: ________________

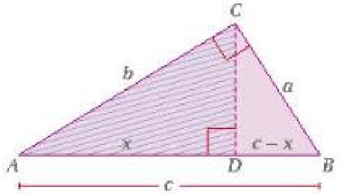
h) Entre todos los equipos del grupo y con apoyo del maestro, escriban una conclusión de esta actividad. ________________________________

III. En la actividad **V** de la lección 14 verificamos que si en un triángulo rectángulo ABC trazamos una perpendicular desde el vértice C al lado AB, que lo corte en D, entonces los triángulos rectángulos ABC, ADC y BCD son **semejantes**.



Usando este resultado mostraremos la relación entre las medidas de los lados de cualquier triángulo rectángulo.

El punto D divide al lado c en dos partes, a las que llamamos x y $c - x$.



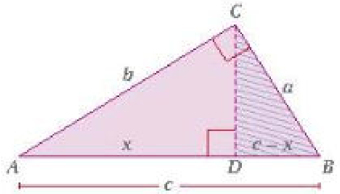
Usando la semejanza de los triángulos ABC y ADC, tenemos:

a) En $\triangle ABC$, razón de la hipotenusa al cateto mayor ________

b) En $\triangle ADC$, razón de la hipotenusa al cateto mayor ________

c) Escriban con literales la relación entre estas dos razones ________

d) Apliquen productos cruzados ________



Usando la semejanza de los triángulos ABC y BCD, tenemos:

e) En $\triangle ABC$, razón de la hipotenusa al cateto menor ________

f) En $\triangle BCD$, razón de la hipotenusa al cateto menor ________

g) Escriban con literales la relación entre estas dos razones ________

h) Apliquen productos cruzados ________________

i) Sustituyan en **g)** la igualdad obtenida en **d)** y despejen c^2 ________________

j) Con el apoyo de su maestro, analicen entre todo el grupo la argumentación que se dio en esta actividad usando una propiedad de semejanza de triángulos rectángulos, para obtener como conclusión el **teorema de Pitágoras**.

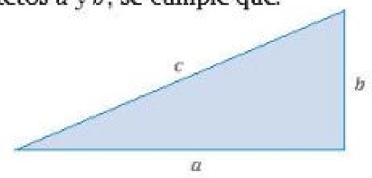
LECCIÓN 41

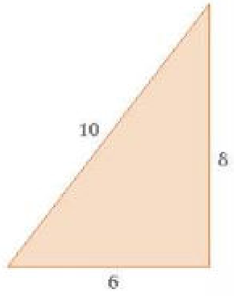
Uso del teorema de Pitágoras (1)

Aplicaciones del teorema de Pitágoras en triángulos y otros polígonos

I. En las lecciones anteriores estudiamos que en un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b, se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$





a) En el triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10, comprueben que:

$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$b^2 = c^2 - a^2$

b) Si conocen el cuadrado de un número, ¿cómo calculan el número? ______________

____

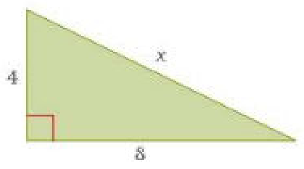
c) Si conocen la medida de los dos catetos, ¿cómo calculan la medida de la hipotenusa? ______________________________

d) ¿Si conocen la medida de la hipotenusa y la de uno de los catetos, ¿cómo calculan la medida del otro cateto? ______________________________

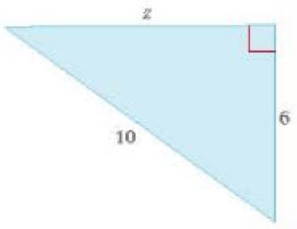
____

e) Compartan con otros equipos las respuestas en **b)**, **c)** y **d)** y lleguen a un acuerdo sobre cómo calcular la medida del tercer lado de un triángulo rectángulo, conociendo la medida de dos de ellos.

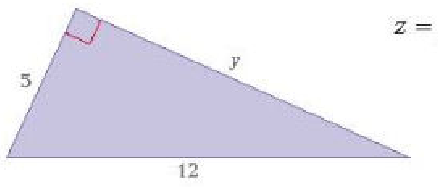
II. En los tres triángulos rectángulos siguientes, calculen la medida del lado que se desconoce.



$x =$ ______

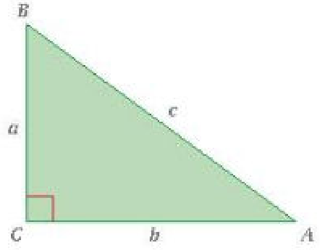


$z =$ ______



$y =$ ______

III. En el triángulo rectángulo ABC calculen la medida del tercer lado.

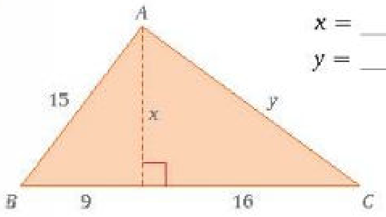


Si $a = 6$, $b = 8$, entonces $c =$ ______

Si $c = 20$, $b = 16$, entonces $a =$ ______

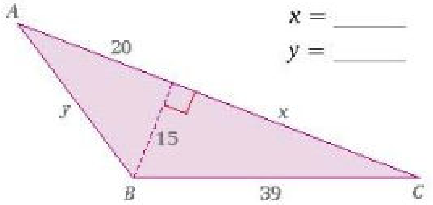
Si $a = 10$, $c = 26$, entonces $b =$ ______

IV. Calculen el valor de x y de y en las siguientes figuras.



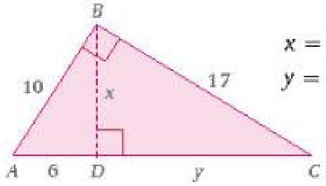
$x =$ ______

$y =$ ______



$x =$ ______

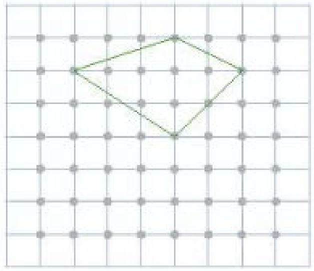
$y =$ ______

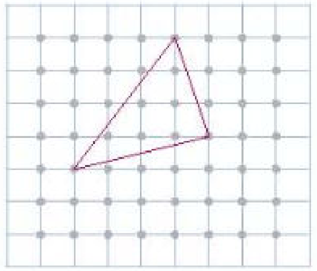


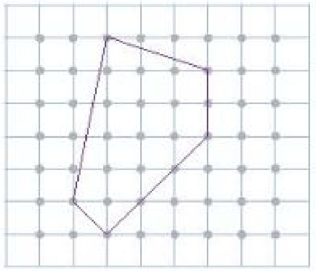
$x =$ ______

$y =$ ______

V. Calculen el perímetro de cada una de las siguientes figuras.







a) ______________ **b)** ______________ **c)** ______________

VI. Tracen en su cuaderno las siguientes figuras geométricas y calculen su área.

a) Un triángulo equilátero de 10 cm por lado.

b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm y su altura trazada desde el lado desigual 4 cm.

c) Un hexágono regular de 4 cm por lado.

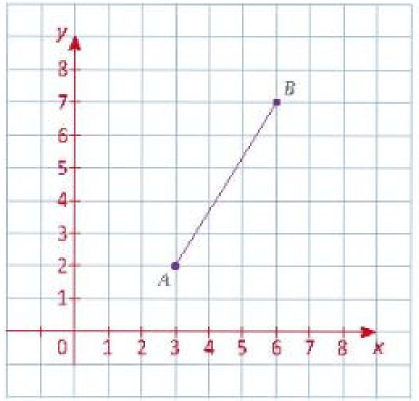
VII. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con otras parejas del grupo, si no coinciden analicen las razones y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 42

Uso del teorema de Pitágoras (2)

Resolución de problemas usando el teorema de Pitágoras

I. En el plano cartesiano, ¿cómo calcular la distancia entre dos puntos? Por ejemplo, ¿cuál es la distancia entre los puntos $A = (3, 2)$ y $B = (6, 7)$?



a) ¿Cómo podemos construir un triángulo rectángulo en el que el segmento AB sea la hipotenusa? ___________________________

b) Si llamamos C al tercer vértice de ese triángulo, ¿cómo calculamos la medida de los catetos AC y BC? ___________________________

c) $AC =$ ________ $BC =$ ________

d) Entonces, $AB =$ ________

e) Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros, lleguen a un acuerdo sobre el procedimiento a seguir y escriban cómo calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano. ___________________________

____

II. En hojas cuadriculadas, tracen en cada caso un sistema de coordenadas cartesianas, localicen los puntos indicados y calculen lo que se pide.

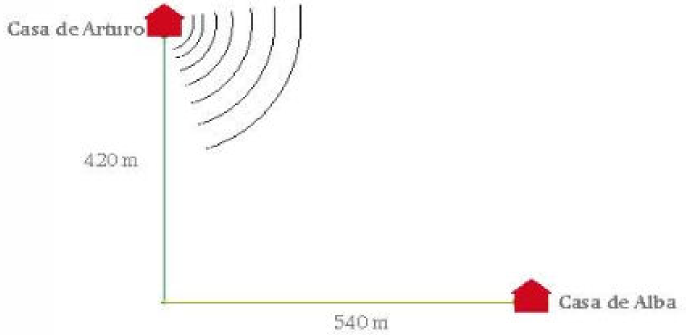
a) La distancia entre los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (7, 4)$.

b) El perímetro del triángulo determinado por los puntos $L = (3, 6)$, $M = (1, 2)$ y $N = (7, 4)$.

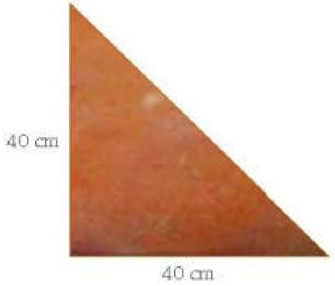
c) Compartan sus resultados con los de otras parejas, si hay diferencias analicen el porqué y, en su caso, corrijan lo necesario.

III. Tracen en su cuaderno un rombo cuyas diagonales midan 16 cm y 12 cm. Calculen su perímetro.

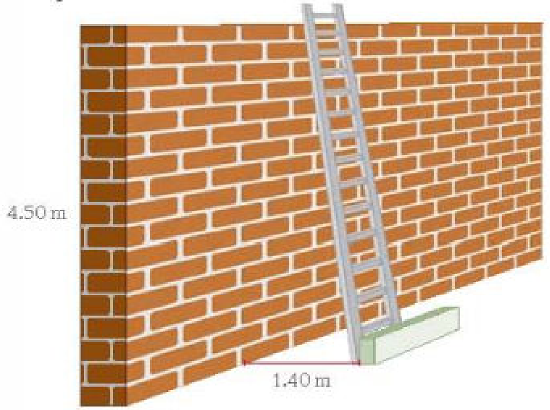
IV. Para ir en bicicleta de su casa a la casa de Alba, Arturo recorre hacia el sur 420 metros, luego da vuelta en una esquina y recorre 540 metros hacia el este. Para comunicarse, Arturo y Alba compraron un juego de *walkie-talkie*, cuyo alcance es de 800 metros. ¿Es suficiente la potencia de su equipo de comunicación o requerirían un equipo más potente? Justifiquen su respuesta.



V. Un azulejero va a cortar por una diagonal una pieza cuadrada de 40 cm por lado y desea saber cuánto medirá esa diagonal. ¿Podrían ayudarlo? (aproximen hasta centésimos).



VI. Un colocador de vidrios tiene una escalera de 5 m de largo y va a instalar vidrios en una ventana que está a 4.50 m de altura. Debe ubicar su escalera a 1.40 m de la pared, que es donde la puede apoyar. ¿Llegará la escalera a la altura de la ventana? Justifiquen su respuesta.



VII. Compartan con otras parejas sus procedimientos y resultados de las actividades **III**, **IV**, **V** y **VI**. Si no coinciden, analicen las razones y corrijan lo necesario.

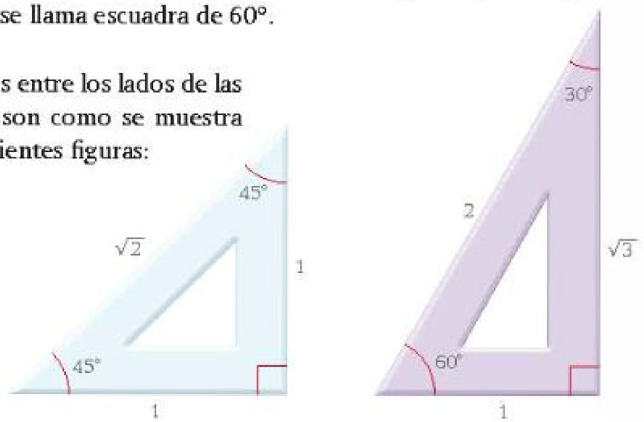
LECCIÓN 43

Uso del teorema de Pitágoras (3)

Las proporciones y el teorema de Pitágoras resuelven problemas geométricos

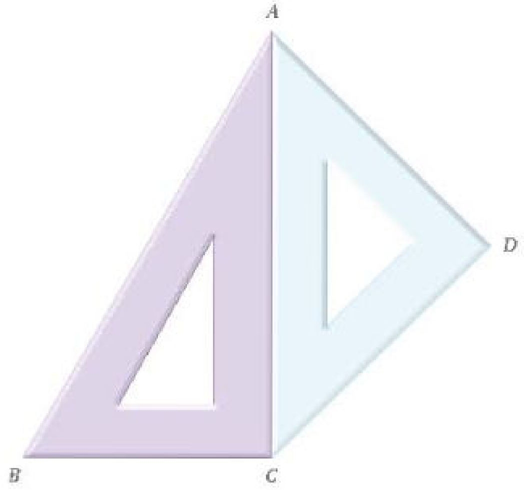
I. Las escuadras de su juego de geometría tienen forma de un triángulo rectángulo. Una de ellas tiene sus catetos iguales y sus ángulos de 90°, 45° y 45°, se llama escuadra de 45°. La otra tiene sus catetos desiguales y sus ángulos miden 90°, 60° y 30°, se llama escuadra de 60°.

Las razones entre los lados de las escuadras son como se muestra en las siguientes figuras:



Analicen por qué la unidad de la escuadra de 45° no es la misma que la unidad de la escuadra de 60°.

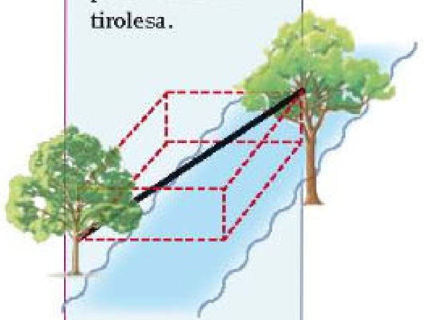
Los lados de las escuadras están relacionados de las siguiente manera:

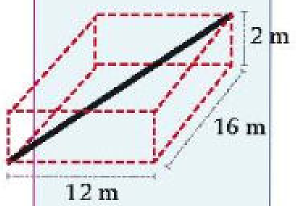


a) Midan la hipotenusa AC de la escuadra de 45° de su juego de geometría y a partir de ese dato calculen la medida de los otros lados de las dos escuadras.
b) Cuando hayan hecho los cálculos verifiquen sus resultados, midiendo los lados de sus escuadras.
c) Comenten con el resto del grupo el procedimiento que siguieron para resolver este problema y con apoyo del maestro resuelvan las dudas que se presenten.

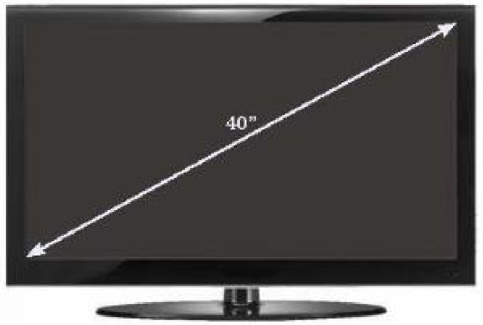
Reto

Se desea colocar una tirolesa entre dos árboles que están en ambos lados de un río, como se muestra en la primera figura. En la segunda figura se indican las medidas del paralelepípedo que determinan los extremos del cable. Calcula el largo del cable que se debe comprar para instalar la tirolesa.





II. La medida comercial de una pantalla plana de televisión es lo que mide en pulgadas su diagonal (1 pulgada equivale aproximadamente a 2.54 cm). Por ejemplo, una pantalla de 40 pulgadas tiene esa medida en su diagonal. La razón entre el ancho y el largo de este tipo de pantallas es $\frac{9}{16}$.



a) ¿Cuáles son las medidas de los lados de una pantalla de televisión de 32 pulgadas? ______________________
b) Si tienen oportunidad, tomen las medidas de una pantalla de televisión, hagan cálculos equivalentes a los anteriores y compártanlos con otros equipos del grupo.
c) Comenten con los demás equipos del grupo su procedimiento para resolver este tipo de problemas.

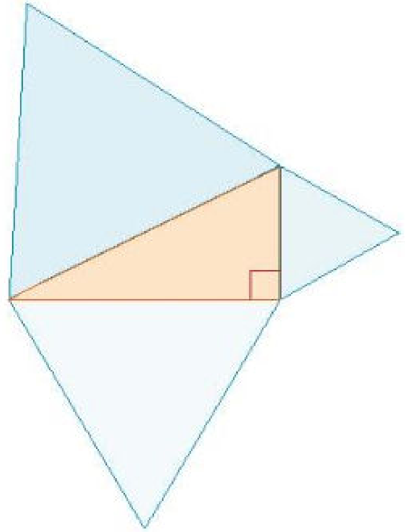
Glosario

Tirolesa. Mecanismo que consiste en una polea suspendida de un cable de acero, fijado en dos puntos situados a diferente altura. Del eje de la polea cuelga un soporte para que una persona u objeto se desplace por gravedad desde un extremo al otro.

III. Con su juego de geometría, tracen en su cuaderno un triángulo equilátero sobre cada lado de un triángulo rectángulo, como se muestra enseguida.

Calculen el área de cada uno de los triángulos equiláteros. ¿Qué relación encuentran entre estas tres áreas? ______________________

____



Complemento tecnológico

Usando software de geometría dinámica, por ejemplo *GeoGebra*, se puede comprobar el teorema de Pitágoras construyendo cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo y comparando sus áreas. Luego, en vez de cuadrados, se puede comprobar construyendo triángulos equiláteros, pentágonos y hexágonos regulares o semicírculos.

Anexo 3, página 255.

LECCIÓN 44

Eventos mutuamente excluyentes

Cálculo de probabilidades utilizando la regla de la suma

I. Contesten lo siguiente.

a) Los eventos A y B son mutuamente excluyentes si cuando sucede A, no ______ ______ B y viceversa: cuando ______ B, ______ sucede A.

b) Discutan si es necesario que se cumplan las dos partes de la afirmación anterior para hablar de eventos mutuamente excluyentes o solamente basta con una de ellas. Lleguen a una conclusión y compárenla con la que hayan formulado otros equipos.

c) Con ayuda del profesor, lleguen a una sola conclusión. ______

d) Den un ejemplo de eventos A y B donde si ocurre A no ocurre B, pero si ocurre B, también ocurre A, es decir, sólo se cumple una parte de la afirmación. ______

e) Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, al no ocurrir el evento A, ¿qué sucede con el evento B? ______. Justifiquen su respuesta y den ejemplos para explicarla. ______

II. Al lanzar dos dados comunes con sus caras numeradas del 1 al 6, sabemos que hay ______ eventos elementales.

a) Si el evento A es "La suma de las caras es 7" y si el evento B es "La suma de sus caras es un número par", ¿los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ______. La probabilidad de que ocurra el evento A es ______. La probabilidad de que ocurra el evento B es ______.

b) La probabilidad de que ocurra el evento "La suma de las caras es 7 y la suma de las caras es un número par" es ______, pues se está pidiendo que los dos eventos ocurran de manera ______ y eso es imposible.

c) La probabilidad de que ocurra el evento "La suma de las caras es 7 o la suma de las caras es un número par" es ______. Es suficiente que ocurra una de las dos cosas para que se cumpla.

d) La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B es la suma de las probabilidades de los eventos ______. Esto se debe a que los eventos son mutuamente ______ y cualquiera de los eventos elementales de A y de B está a favor de que se cumpla A o B.

e) Como conclusión, podemos afirmar que la probabilidad de que ocurra al menos uno de dos eventos mutuamente excluyentes está dada por la ______ de las probabilidades de éstos.

III. El papá de Ricardo vende animales domésticos. En la mañana, cuando abrió la tienda había 9 perros, 6 gatos, 5 conejos, 100 peces, 10 canarios, 2 pericos y 20 tortugas. El primer cliente del día compró una mascota que eligió al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya comprado

a) un gato? ______

b) un ave? ______

c) un mamífero? ______

IV. Teresa, Blanca y Rosario son muy amigas y las tres promovieron una rifa con un único premio para beneficio de un viaje de prácticas de su escuela. De los 10 000 números para la rifa, ellas vendieron 1 000, 2 000 y 1 500 respectivamente, el resto lo vendieron otros estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que el boleto premiado

a) lo haya vendido Teresa? ______

b) lo haya vendido Blanca? ______

c) lo haya vendido Rosario? ______

d) lo haya vendido Teresa o Blanca? ______

e) lo haya vendido Teresa o Rosario? ______

f) lo haya vendido Rosario o Blanca? ______

g) lo haya vendido cualquiera de esas tres amigas? ______

h) no lo haya vendido ninguna de esas tres amigas? ______

V. Don José, el dueño de la papelería que está cerca de la escuela a la que asisten Teresa, Blanca y Rosario decidió apoyar el viaje de prácticas, adquiriendo el 10% de los boletos a cada uno de los alumnos que los vendían. Todos los alumnos que vendían boletos acudieron con don José para que éste les comprara los boletos prometidos.

a) ¿Cuántos boletos compró don José y cuál es la probabilidad de que gane el premio? Compró ______ boletos y la probabilidad de ganar el premio es ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que don José gane el premio con uno de los boletos que compró a las tres amigas? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que don José gane el premio con uno de los boletos que no le vendieron las tres amigas? ______

d) ¿Qué relación hay entre las probabilidades de los tres incisos anteriores? ______

e) ¿Cuál es el evento que define al inciso **a)**? ______

f) ¿Cuál es el evento que define al inciso **b)**? ______

g) ¿Por qué son eventos mutuamente excluyentes los eventos de los incisos **e)** y **f)**? ______

Eventos complementarios

Cálculo de probabilidades utilizando la regla de la suma y el valor del complemento

I. Contesten lo siguiente.

a) Si los eventos A y B son complementarios, entonces cuando sucede A, no ________ B, y cuando ________ B, entonces ________ sucede A.

b) Discutan cuál es la diferencia de la afirmación anterior con la que define a los eventos mutuamente excluyentes.

c) Con ayuda del profesor, lleguen a una sola conclusión. ________

d) Si dos eventos son complementarios, entonces son ________ excluyentes. Pero si dos eventos son mutuamente ________, no necesariamente son ________

e) ¿Cuál es la probabilidad de "Que ocurra el evento A o que ocurra su complemento"? ________

f) De lo anterior podemos concluir que la probabilidad del evento complementario de A es igual a la resta de la unidad menos la probabilidad del evento ________

II. Arturo y Bernardo han jugado ajedrez entre ellos 100 veces, de las cuales Bernardo ha ganado la mitad de las partidas, pero han empatado 20. Hoy jugarán una vez más y nos interesa tener un buen pronóstico para saber qué es más probable que suceda. Usen la información anterior para calcular las probabilidades pedidas. Es necesario leer las preguntas y reflexionar sobre la respuesta que darán.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Arturo? ________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no gane Arturo? ________

c) Completen las oraciones para que describan el evento "Arturo no gana".

1. "Arturo ________ o quedan empatados"
2. "Bernardo ________ o quedan empatados"

d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane alguno de los dos? ________

e) ¿Cuál es la probabilidad de que no queden empatados? ________

f) Compara los resultados de los incisos **d)** y **e)**. ¿Se trata del mismo evento? ________ ¿Por qué? ________

g) ¿Cuántos eventos elementales existen en este caso? ____ ¿Cuáles son? ________

h) Describan el evento seguro. ________

i) Sin considerar el evento seguro, ¿qué es lo más probable que suceda? ________

III. Por lo que vemos, cuando se quiere obtener la probabilidad del complemento de un evento que está formado por eventos mutuamente excluyentes, primero se calcula la probabilidad de éstos mediante la regla de la ________, y después se resta este valor a la ________.

De esta manera, sólo hay que verificar que se está trabajando con eventos mutuamente excluyentes para poder aplicar lo señalado.

IV. Se lanzan dos dados comunes, con sus caras numeradas del 1 al 6. Sean los eventos: A es "La suma de las caras es 5", B es "La suma de sus caras es 9" y C es "La suma de las caras es un número par".

Utiliza lo obtenido en la actividad **III** para contestar lo que sigue.

a) ¿Los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes? ____

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada evento? La probabilidad de A es ________; la del evento B es ________ y la de C es ________.

c) Sea Z el evento que es el complemento de que ocurra A o B. Completa esta otra definición del evento Z: "La suma de las caras no es ____ ni ____"

d) La probabilidad de que ocurra A o B es ____ + ____ = ____; por tanto, la probabilidad de que ocurra Z es 1 – ____ = ____

e) Sea Y el complemento del evento que ocurra A o C. Escribe con palabras otra definición del evento Y ________

f) La probabilidad de que ocurra A o C es ____ + ____ = ____; por tanto, la probabilidad de que ocurra Y es 1 – ____ = ____

g) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra A ni B ni C? La probabilidad de que ocurra A o B o C es ____ + ____ + ____ = ____. Por tanto, la probabilidad de que no ocurran A, B o C, es decir de que no ocurra A ni B ni C, es 1 – ____ = ____

V. Al lanzar una moneda normal, el evento A es "la moneda cae *águila*" y B es "la moneda cae *sol*". Si llega a caer de canto se repite el lanzamiento hasta obtener uno de los dos casos.

a) ¿Estos eventos son mutuamente exclusivos? ____ Porque la probabilidad de que al lanzar la moneda ocurran A y B simultáneamente es ________

b) La probabilidad de que ocurra A o B es ____ (Ojo, no es lo mismo que el renglón anterior porque una cosa es "o" y otra es "y".)

c) Sea W el complemento del evento A o B. Escribe otra definición del evento W ________

d) Escribe la probabilidad de W: 1 – ____ = ____.

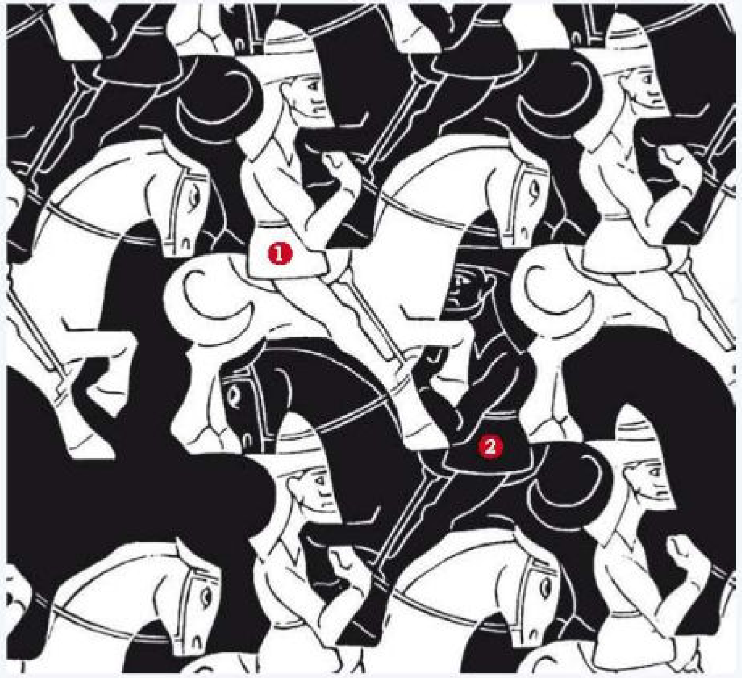
Evaluación tipo Enlace

1. Para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + 21x - 72 = 0$ mediante factorización, encontramos que una solución se obtiene del factor $(x - 3)$, por tanto, la otra solución es
   a) -7 b) -3 c) 24 d) -24

2. Al dividir entre 3 la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$ y separar ese resultado en factores, uno de éstos es $(x - \frac{5}{3})$. El otro factor debe ser
   a) $x + 1$ b) $x - 1$
   c) $x + \frac{3}{5}$ d) $x - \frac{3}{5}$

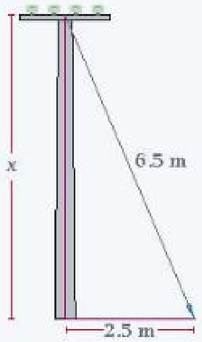
3. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual a 613. ¿Cuál es la ecuación que permite determinar los números?
   a) $n^2 + 2n + 306 = 0$ b) $n^2 + n - 613 = 0$
   c) $n^2 + n - 306 = 0$ d) $n^2 + 2n + 613 = 0$

4. En este mosaico artístico, para transformar la figura ❶ en la figura ❷, además de cambiarle el color, debemos hacer dos transformaciones:



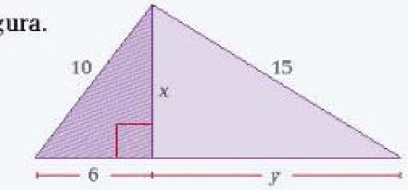
   a) una reflexión y una rotación
   b) una traslación y una rotación
   c) una reflexión y una traslación
   d) dos traslaciones

5. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de 5 cm de largo por 3 cm de ancho?
   a) 4 cm
   b) 5.83 cm
   c) 6.25 cm
   d) 3.4 cm



6. ¿Cuál es la altura del poste?
   a) 4.85 m
   b) 6 m
   c) 6.25 m
   d) 7 m

7. Calcula el valor de y en la siguiente figura.
   a) 11.18
   b) 12.69
   c) 13.75
   d) 17



8. La regla de la suma de las probabilidades se puede aplicar:
   a) con cualquier par de eventos
   b) sólo si son eventos complementarios
   c) sólo si son eventos independientes
   d) sólo si son eventos excluyentes

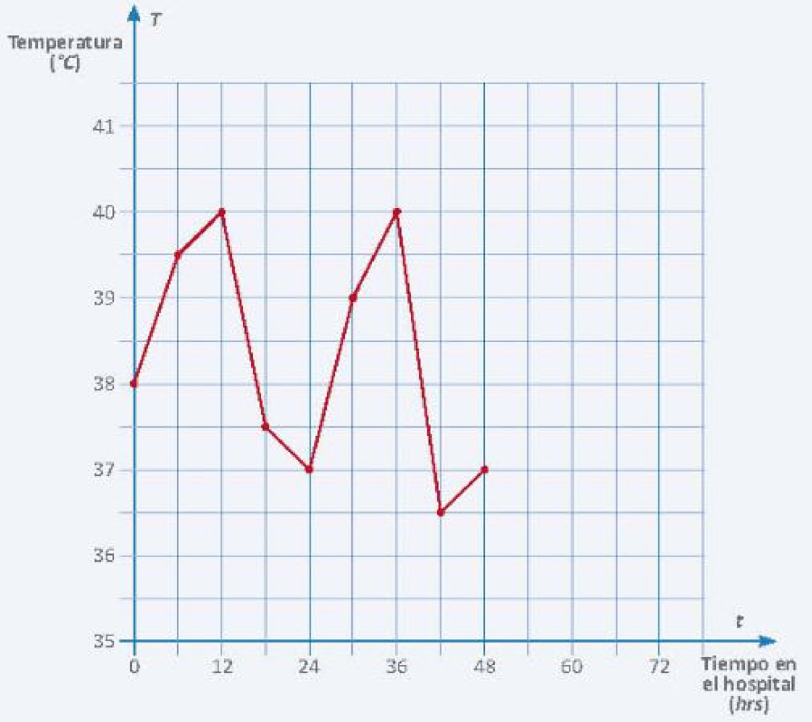
9. La suma de las probabilidades de los eventos complementarios siempre es
   a) menor que 1 y mayor que 0
   b) la unidad
   c) el doble que la de cualquiera de ellos
   d) la del evento nulo

10. Ernestina y Leticia tienen tres cartas, 2 de las cartas son rojas y la otra es negra. Cada una saca una carta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta que no se haya elegido sea la negra?
   a) 0
   b) $\frac{1}{9}$
   c) $\frac{2}{9}$
   d) $\frac{3}{9}$

Evaluación tipo PISA

Control de la temperatura corporal

En los hospitales llevan un seguimiento de los signos vitales de las personas internadas y, para controlar la fiebre, suelen registrar y anotar cada 6 horas lo que marcó el termómetro. La gráfica siguiente muestra las variaciones, durante las primeras 48 horas, de la temperatura corporal de Luis, un paciente que ingresó con un cuadro infeccioso. Analiza y contesta.



Gráfica del registro de temperatura corporal de Luis, a partir de su ingreso al hospital

1. Delinea con un color los segmentos de la gráfica correspondientes a un aumento en la temperatura corporal de Luis.

2. ¿En qué momentos consideras que se le administró medicamento para bajar la fiebre? ______________ y ______________. Explica por qué lo consideras así. ______________

3. ¿En qué momentos la temperatura fue mayor? ______________ y ______________

4. ¿En cuál de los siguientes intervalos de tiempo, después de su ingreso, el cambio en la temperatura fue mayor?
   a) De 6 a 12 horas
   b) De 24 a 30 horas
   c) De 12 a 18 horas
   d) De 36 a 42 horas

5. Completa la gráfica para que se incorporen los registros del tercer día de Luis en el hospital, si se sabe que:
   a) durante las siguientes 12 hrs la temperatura bajó paulatinamente hasta 36.5 °C, y
   b) se mantuvo así hasta las 72 hrs, cuando a Luis se le dio de alta.

6. Escribe F o V en el recuadro según consideres que la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tus respuestas:
   a) No se debieron haber unido los puntos de los registros de temperatura ☐
   b) Los puntos de los registros se pudieron haber unido con tramos de curvas ☐
   c) La primera pastilla tuvo mayor efecto que la segunda ☐
   d) El tercer día la infección estaba prácticamente controlada ☐

7. Relaciona los periodos indicados con los correspondientes estados de acuerdo a los cambios de temperatura:

Estado
Mayor incremento de la temperatura (variación positiva)
Menor incremento de la temperatura (variación positiva)
Mayor decremento de la temperatura (variación negativa)
Menor decremento de temperatura (variación negativa)

Periodo (*hrs*)
0 - 6
6 – 12
12 – 18
18 – 24
24 – 30
30 – 36
36 – 42
42 - 48

La fotografía de estas páginas muestra cuatro figuras en el espacio que son proporcionales entre sí. El fotógrafo captó las tres esculturas y agregó a una persona para completar de manera magistral cuatro figuras de las que en matemáticas llamamos figuras homotéticas. Podemos apreciar que, a pesar de que las figuras son de diferente tamaño, se conservan las proporciones entre ellas, de manera que si calculamos los cocientes entre longitudes de partes correspondientes, los resultados son iguales, y a este cociente se le conoce como razón de homotecia.

BLOQUE III

Aprendizajes esperados:

- Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Contenidos

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
- Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
- Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.
- Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
- Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
- Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

La fórmula general

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

Reto

A partir de la fórmula general de la ecuación cuadrática, efectúa las operaciones necesarias para despejar x y llegar a la fórmula general que la resuelve. O bien, a partir de la fórmula general, haz operaciones hasta que regreses a $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cuál proceso te resultó más simple?

A partir de la forma general de una ecuación cuadrática, o de segundo grado,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se puede despejar x para obtener

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que recibe el nombre de **fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado** que esté expresada en su forma general.

Esta fórmula es de mucha utilidad y forma parte de las herramientas que el estudiante debe tener siempre disponibles en la memoria.

La resolución de los problemas que siguen requiere plantear una ecuación de segundo grado y las soluciones de ésta se obtienen aplicando la fórmula general.

I. Laura dejó abierto sobre la mesa el libro que estaba leyendo. Al mirar los números de las dos páginas expuestas, veo que su producto es 756. ¿Qué páginas son?

a) Escriban la ecuación que describe el problema. ____________

b) Transformen la ecuación a su forma general: ____________

c) Escriban los valores de a: ______, b: ______ y c: ______

d) Sustituyan los valores de a, b y c en la fórmula general, sin hacer las operaciones.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \_\_\_\_\_\_$$

e) Consideren la expresión $b^2 - 4ac$ que está dentro del símbolo de raíz cuadrada. Este valor se denomina **discriminante**. Calculen su valor en este caso: ______

f) Obtengan la raíz cuadrada del discriminante: ______

g) Efectúen las operaciones faltantes para obtener las dos soluciones de la ecuación:

$$x_1 = \_\_\_\_\_\_$$
$$x_2 = \_\_\_\_\_\_$$

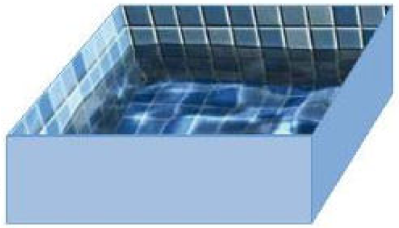
h) En la ecuación general del inciso **b**), sustituyan cada una de las soluciones, para comprobar que la hacen válida.

i) ¿Qué diferencia importante existe entre las dos soluciones? ____________

____

j) Expliquen el razonamiento que hicieron para que ambas soluciones tengan sentido. ____________

II. Una alberca tiene fondo cuadrado y paredes de 2.5 m de altura. La suma de las áreas del fondo y de las cuatro paredes es igual a 157.25 m². Encuentren la medida de sus lados.



Como es usual, designen con x la medida de los lados de la alberca. Enseguida escriban los datos del problema:

Área del fondo de la alberca: ____________

Área de una de las paredes: ____________

Suma de las áreas de la las cuatro paredes: ____________

Suma del área del fondo más las áreas de las cuatro paredes: ____________

Ecuación que describe los datos del problema:

____

Forma general de la ecuación cuadrática que resuelve el problema:

____

Valor de los coeficientes de la ecuación:

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustitución de los coeficientes en la fórmula general:

$$x = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad}}{\quad}$$

Valor del discriminante: ______

Valores de x encontrados: ____________

Expliquen cuál de los valores encontrados para x es el que debe considerarse solución del problema y por qué. ____________

____

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y si hay diferencias, argumenten su procedimiento y su resultado.

Ecuación general de 2o. grado

Variantes de las ecuaciones de segundo grado

A partir de la forma general de una ecuación cuadrática, o de segundo grado,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se pueden presentar casos en que a = 1, es decir, ecuaciones de la forma

$$x^2 + bx + c = 0$$

lo cual permite resolverlas más rápidamente, pues la fórmula general para encontrar las soluciones se simplifica para quedar así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

I. Resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno, aplicando la fórmula general.

a) $5x^2 + 12x - 9 = 0$ b) $3x^2 - 6x + 4 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$ d) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

e) $x^2 - 3x + 5 = 0$ f) $4x^2 + 7x + 3 = 0$

Habrás notado la singularidad de las ecuaciones c) y e), por el número de sus soluciones, y también te habrás dado cuenta, al aplicarles la fórmula general, que el número de soluciones depende del valor del discriminante. Revisa y compara ese valor en las ecuaciones a) – f) y completa las siguientes afirmaciones.

Si el valor del discriminante es ______, la ecuación tiene una solución.
Si el valor del discriminante es ______ a cero, la ecuación tiene dos soluciones.
Si el valor del discriminante es ______ a cero, la ecuación no tiene solución.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y si no coinciden, discútanlas y corrijan los posibles errores.

A las soluciones de una ecuación cuadrática también se les llama **raíces**, así que cuando una ecuación tiene una solución repetida, como la del inciso c), se suele decir que tiene una **raíz doble**.

Lo anterior ocurre cuando, al aplicar la fórmula general, las operaciones realizadas al tomar el signo positivo de la raíz cuadrada producen el mismo resultado que cuando se toma el signo negativo de ella: ambas soluciones son iguales, es decir, se tiene una raíz doble.

Una aclaración importante es que cuando se dice que una ecuación cuadrática no tiene solución, se está refiriendo a los números reales, ya que en éstos no existe raíz cuadrada de números negativos.

II. En la siguiente tabla, escriban los valores de a, b y c, calculen el valor del discriminante y anoten el número de soluciones de cada ecuación.

Ecuación	Coeficientes y término independiente	Valor del discriminante	Número de soluciones
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$5x^2 + 9x + 7 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$6x^2 + 8x + 2 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 + 8x + 16 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 - 10x + 25 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$7x^2 + 10x + 3 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 + 14x + 49 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		

Complemento tecnológico

Hoja de cálculo para resolver ecuaciones cuadráticas.

Anexo 4, página 256.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con la ayuda de su profesor, eliminen las diferencias.

III. Una variante de las ecuaciones cuadráticas es la que ocurre cuando no tienen término independiente, es decir, cuando $c = 0$. Resuelve las siguientes.

a) $3x^2 = 21x$ b) $2x^2 - x = 0$
c) $5x^2 + 5x = 0$ d) $3(x^2 + 8) = 24 - 15x$

En estos casos, es recomendable escribir las ecuaciones en la forma $ax^2 + bx = 0$, si es que no lo están, y factorizar x, es decir, escribirlas como producto de dos factores, uno de los cuales es x.

Por ejemplo

$$-10x + x^2 = 0$$
$$x^2 - 10x = 0$$
$$x(x - 10) = 0$$

En este tipo de ecuaciones cuadráticas, una de las soluciones siempre es ______, ¿por qué? ______________________

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y, con la ayuda de su profesor, corrijan las diferencias y aclaren las dudas.

Completar el cuadrado

Problemas y variantes de ecuaciones de segundo grado

Los problemas que consisten en encontrar las características de un rectángulo, proporcionan una excelente oportunidad para aprender a plantear algebraicamente una situación expresada en lenguaje natural.

Resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas y luego comparen su planteamiento con el que aquí se muestra.

I. Un terreno rectangular mide 2 m más de largo que de ancho y su área aumenta 70 m² cuando el ancho se triplica. ¿Cuáles son sus dimensiones? Consideren sólo la raíz positiva de la ecuación.

Ancho = x

Largo = ______

Área inicial = ______

Triple del ancho = ______

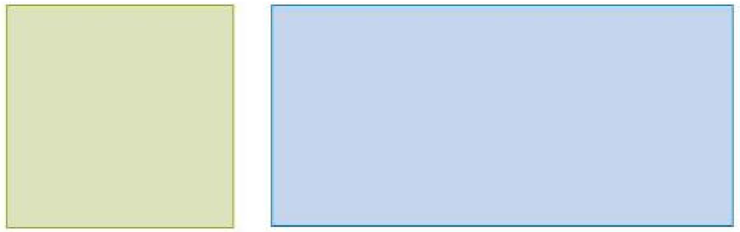
Área inicial más 70 m² = ______

Área modificada al usar el triple del ancho = ______

El planteamiento del problema requiere igualar el área inicial más 70 m² con el área modificada al usar el triple del ancho. Luego de hacer las operaciones pertinentes en dicha igualdad, se llega a una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$, que se resuelve con la fórmula general. Es pertinente aclarar que al triplicar el ancho, el largo original del terreno no se modifica.

Al desechar la solución negativa, sólo queda $x = 5$.

II. La diferencia entre las áreas de estos terrenos es 56 m². Encuentren el perímetro del terreno cuadrado.



x $\qquad$ $2x + 1$

III. Desarrollen la operación indicada:

a) $(x + 4)^2 =$ ______

b) $(a + 9)^2 =$ ______

c) $(y + 6)^2 =$ ______

Ahora hagan la operación inversa:

d) $x^2 + 10x + 25 = (\_\_\_ + \_\_\_)^2$

e) $y^2 + 18y + 81 = (\_\_\_ + \_\_\_)^2$

Una ecuación cuadrática puede presentarse como el desarrollo incompleto de un binomio al cuadrado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x = 27$$

Para resolverla se aplica la técnica de **completar el cuadrado**:

Primer paso: $x^2 + 6x + 3^2 = 27 + 3^2$

$(x + 3)^2 = 36$

$(x + 3) = \sqrt{36}$

$x + 3 = \pm 6$

$x = -3 \pm 6$

Soluciones: $x_1 =$ ____ , $x_2 =$ ____

¿Cómo se determina el número cuyo cuadrado se agregó en el primer paso?

______

En general, si una ecuación tiene la forma $x^2 + bx = c$, para completar el cuadrado el número que debe agregársele es $\left(\frac{\_\_}{}\right)^2$.

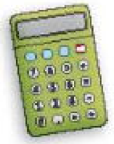
IV. En su cuaderno, resuelvan las siguientes ecuaciones con la técnica de completar el cuadrado y, al terminar, comprueben las soluciones sustituyendo sus valores en la ecuación original. Finalmente, anoten la ecuación con el cuadrado completo y las soluciones en las celdas correspondientes de la tabla.

Ecuación	Ecuación con el cuadrado completo	Soluciones o raíces
$x^2 + 12x = 13$	$(x + 6)^2 = 49$	
$x^2 + 14x - 32 = 0$		
$x^2 + 6x = 7$		
$x^2 + 8x = 33$		$x_1 = 3$, $x_2 = -11$
$x^2 + 10x = 0$		
$x^2 + 16x - 17 = 0$		

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, con ayuda de su profesor, discutan las diferencias y aclaren las dudas hasta que todos estén de acuerdo.

Problemas sobre semejanza de figuras

Lectura de fotografías, planos y figuras a escala



I. La ilustración de la izquierda es una fotografía satelital de la escuela secundaria a la que asiste Roberto. Sabemos que la cancha de futbol (que está remarcada en la fotografía) mide 45 m de ancho.

¿Podemos estimar el largo de esa cancha y las medidas de otras instalaciones de la escuela?

En la fotografía, el ancho de la cancha mide 2.6 cm y el largo 4.2 cm, aproximadamente. Puesto que las medidas de la fotografía son directamente proporcionales a las medidas de los objetos reales, con estos datos podemos plantear la siguiente proporción:

$$\frac{2.6 \text{ cm}}{45 \text{ m}} = \frac{4.2 \text{ cm}}{x}$$

Usando productos cruzados, obtenemos:

$$x(2.6 \text{ cm}) = 45 \text{ m} \times 4.2 \text{ cm}$$

Despejando x:

$$x = \frac{45 \text{ m} \times 4.2 \text{ cm}}{2.6 \text{ cm}}$$

$$x = 72.7 \text{ m}$$

Glosario

Estimar. Calcular el valor aproximado de algo.

a) El edificio donde Roberto tiene su salón de clases está marcado con la letra A. Estimen sus dimensiones.
b) Estimen las dimensiones de otras instalaciones de la escuela de Roberto, como los edificios marcados con B, C, D, E y F.
c) Estimen el área del terreno de la escuela de Roberto.
d) Comparen sus resultados con los de otros equipos. Si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo necesario.

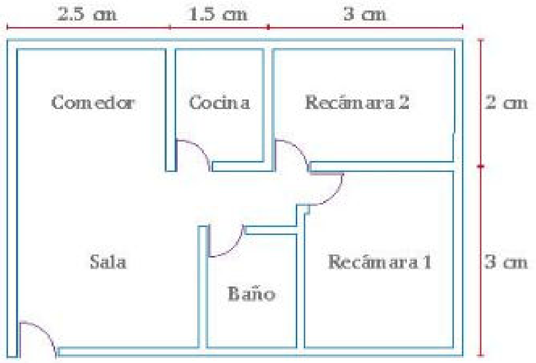
Complemento tecnológico

Si tienen acceso a equipo de cómputo conectado a Internet pueden descargar el software gratuito *Google Earth*, localizar la población donde viven y buscar algunos sitios como su casa y su escuela. Tomen las medidas de algunos espacios y compárenlas con las que obtienen con el software. Pueden también usarlo para medir la distancia de su casa a la escuela, las distancias entre las casas de los amigos, la distancia por carretera o en línea recta de un lugar a otro y viajar virtualmente por los lugares del mundo que les interese.

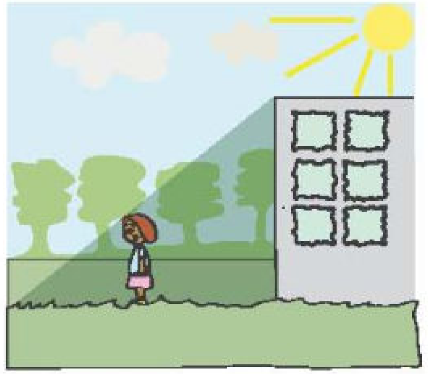
II. El plano de la casa de Pedro está trazado a una escala de 1 cm a 1.5 m.

Encuentren el largo y ancho de:

a) Toda la casa ______
b) La recámara 1 ______
c) La cocina ______
d) El baño ______
e) Comparen sus resultados con otras parejas del grupo. ¿Coinciden? En caso contrario, analicen sus respuestas y, si encuentran algunos errores, corríjanlos



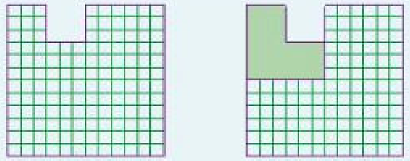
III. Para planear cómo estimar de manera indirecta la altura de su escuela, Irma usa el siguiente dibujo:



a) ¿Qué datos necesita Irma para poder hacer los cálculos correspondientes? ______
b) ¿Qué propiedad de semejanza de triángulos debe aplicar Irma para hacer sus cálculos? ______
c) Asignen cierta altura a la estatura de Irma y calculen la altura de la escuela.
d) Comparen su procedimiento y resultado con los de otras parejas del grupo. Probablemente hay diferencias en la estimación de la altura de la escuela, analicen los motivos de esas diferencias y lleguen a una conclusión.

Reto

La figura de la derecha se ha partido en dos figuras semejantes entre sí, la escala entre ellas es 1:2. ¿Puedes partirla en dos figuras semejantes, pero no iguales? ¿Qué escala tiene tu resultado?



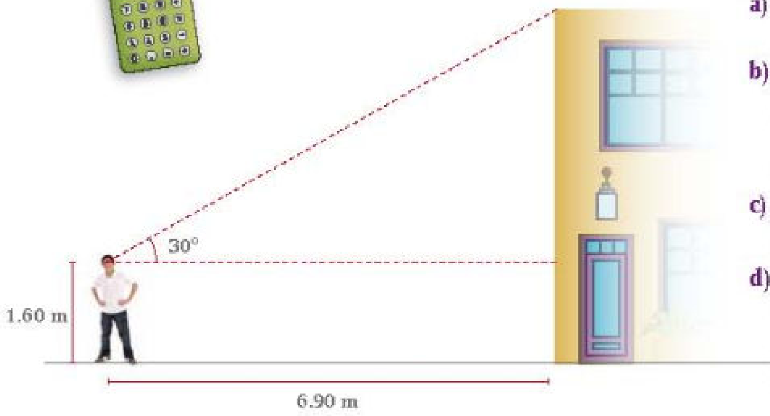
LECCIÓN 50

Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos (1)

Estimación de alturas usando semejanza

Luis va a estimar la altura de su casa y se propone aplicar tres procedimientos diferentes.

I. Consideren que Luis mide 1.68 m de estatura y que sus ojos están 8 cm abajo de la parte superior de su cabeza. Él se encuentra a 6.90 m de la base de su casa y el ángulo desde el cual ve la esquina más alta de la casa mide 30°.



a) En su cuaderno copien a escala el esquema anterior.

b) Para facilitar la comunicación entre los miembros del equipo, coloquen literales en los vértices del triángulo que van a usar para resolver el problema.

c) ¿Qué altura obtuvieron para la casa de Luis? ____________________

d) Comparen su esquema y su solución con otros equipos. Si hay grandes diferencias analicen las causas y corrijan lo necesario.

e) Si se proponen usar el procedimiento visto en esta lección para calcular alturas inaccesibles, con el apoyo de su maestro de ciencias investiguen cómo medir el ángulo que se forma entre la horizontal a la altura del ojo y la línea que une el ojo con la esquina superior de la casa o del objeto cuya altura quieran medir.

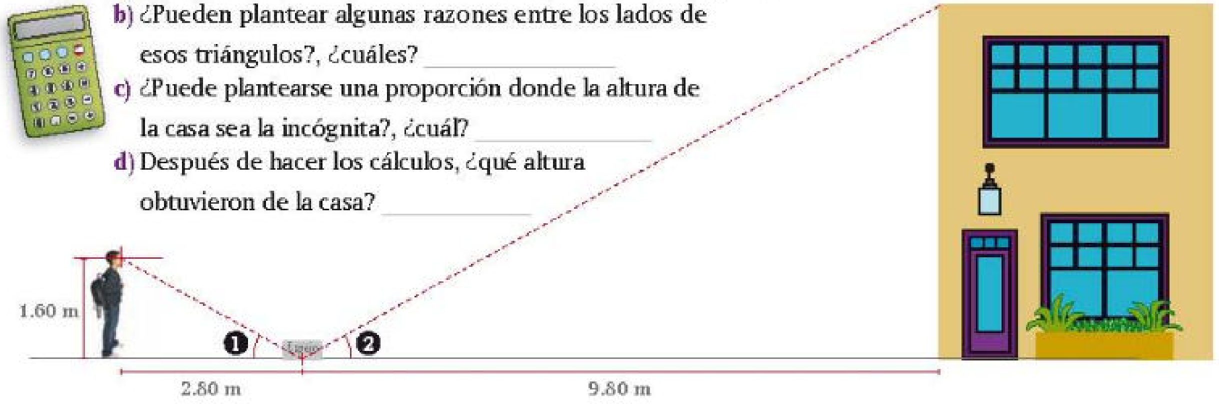
II. Luis ve el punto más alto de su casa en un espejo que está a 2.80 m de sus pies y a 9.80 m de la base de su casa. Luis sabe, por su clase de física de 2o. grado, que al reflejarse la luz en el espejo, el ángulo de incidencia ❶ es igual al ángulo de reflexión ❷.

a) Anoten las literales a usar en los vértices de los triángulos.

b) ¿Pueden plantear algunas razones entre los lados de esos triángulos?, ¿cuáles? ____________________

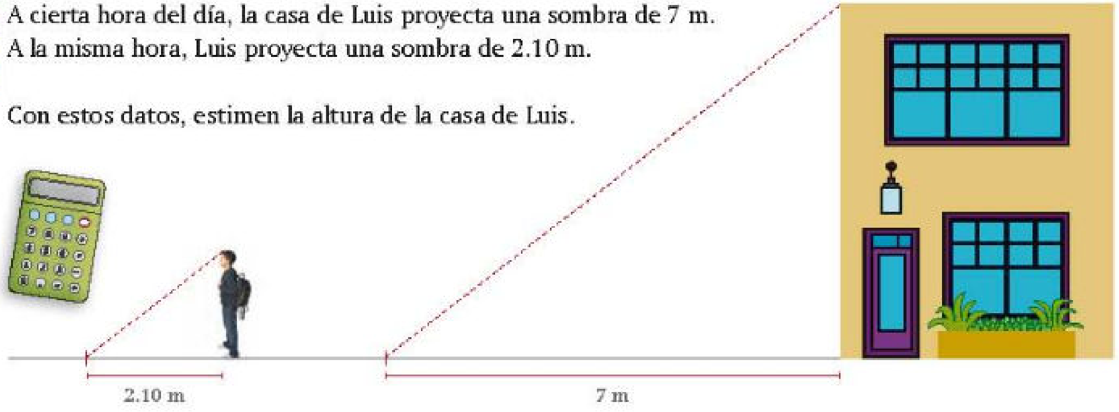
c) ¿Puede plantearse una proporción donde la altura de la casa sea la incógnita?, ¿cuál? ____________________

d) Después de hacer los cálculos, ¿qué altura obtuvieron de la casa? ____________________



III. A cierta hora del día, la casa de Luis proyecta una sombra de 7 m. A la misma hora, Luis proyecta una sombra de 2.10 m.

Con estos datos, estimen la altura de la casa de Luis.



Antes de hacer cálculos, pueden plantearse algunas preguntas:

a) ¿La altura de la casa de Luis será mayor o menor que la longitud de su sombra? ____________________ Den argumentos que justifiquen su respuesta.

b) ¿Pueden construir algunas razones entre los lados de los triángulos?, ¿cuáles? ____________________

c) ¿Pueden plantear una proporción con estas razones?, ¿cuál? ____________________

d) Después de hacer los cálculos, ¿qué altura obtuvieron de la casa? ____________________

V. El día que Luis cumplió 15 años, le tomaron esta fotografía junto a su casa. Sabemos que entonces Luis media 1.65 m de estatura. Con este único dato, ¿será posible estimar la altura de su casa? Podríamos preguntarnos:

a) ¿Qué partes de la fotografía necesitan medir? ____________________

b) En cuanto han tomado las medidas necesarias, ¿pueden construir algunas razones con ellas?, ¿cuáles? ____________________

c) Con estas razones, ¿puede plantearse una proporción, en donde la incógnita sea la altura de la casa?, ¿cuál? ____________________

d) ¿Qué resultado obtuvieron para la altura de la casa de Luis? ____________________

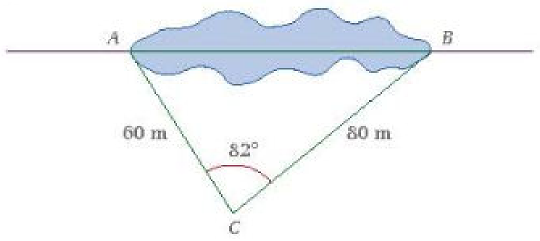
VI. Usen los procedimientos tratados en esta lección para estimar la altura de un objeto inaccesible de su escuela. Puede ser el astabandera, un árbol, el tablero de basquetbol. Varios equipos pueden elegir el mismo objeto y cuando hayan calculado su altura contrasten sus datos, sus procedimientos y sus resultados.

VII. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con otros equipos y corrijan lo necesario.

Problemas sobre congruencia y semejanza de triángulos (2)

Uso de la semejanza para estimar distancia

I. Para calcular de manera indirecta el largo *AB* de una laguna, se hizo el siguiente esquema, en el que se seleccionó un punto *C*, desde donde pueden observarse los puntos *A* y *B*.



Para trazar los lados *AC* y *BC* se usaron cuerdas de manera que quedara definido el $\triangle ABC$.

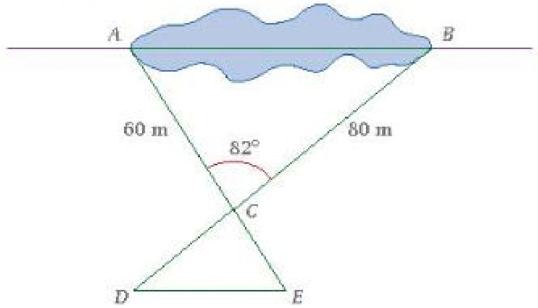
a) En su cuaderno, tracen a escala el $\triangle ABC$.

b) ¿Qué escala usaron para trazar el $\triangle ABC$? ______________

c) ¿Qué resultado obtuvieron del largo de la laguna? ______________

d) Probablemente en otros equipos usaron una escala diferente a la suya, aunque el resultado del largo *AB* que calcularon debiera ser parecido, Comparen su resultado con otros equipos. ¿Coinciden? Si no coinciden analicen las razones y corrijan lo necesario.

II. Otra manera de abordar el mismo problema es trazar triángulos semejantes, como se muestra en el esquema de la izquierda.



a) Tracen en su cuaderno un esquema como éste. Prolonguen los lados *AC* y *BC* del $\triangle ABC$ para trazar el $\triangle EDC$ semejante al anterior.

b) ¿Qué longitudes le dieron a los lados *CD* y *CE* del $\triangle EDC$ para tener un triángulo semejante al $\triangle ABC$?

$CD =$ ________, $CE =$ ________

c) Establezcan las razones entre los lados del $\triangle ABC$ y el $\triangle EDC$. ______________

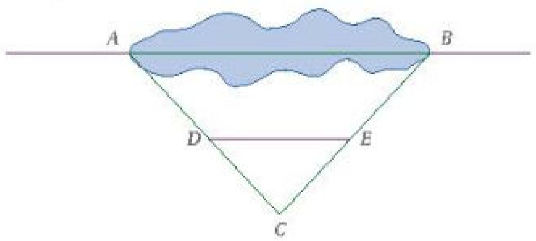
d) Luego de hacer los cálculos, ¿qué resultado obtuvieron para el largo de la laguna? ______________

____

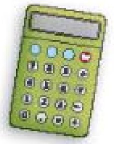
e) Probablemente otros equipos usaron otros datos para construir el $\triangle EDC$, aunque la longitud de *AB* debe resultar igual en todos los casos. Comparen su resultado con otros equipos, si hay diferencias analicen el porqué y lleguen a un acuerdo.

III. Un tercer procedimiento para resolver este problema es colocando el punto *C* de manera que el triángulo *ABC* que resulte sea un triángulo isósceles.

Usen la información que se da a la derecha de la figura para calcular el largo de la laguna.



$AC = 80$ m $BC = 80$ m
$AD = 50$ m $BE = 50$ m
$DE = 35$ m



a) De acuerdo con los datos que se proporcionan, ¿qué triángulos semejantes pueden usarse para encontrar la longitud del lado *AB*? ______________

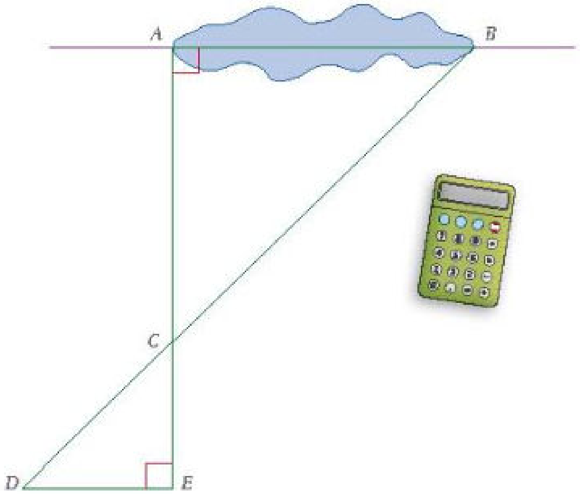
b) Escriban las razones entre los lados correspondientes de estos triángulos.

____

c) Después de hacer los cálculos, ¿qué resultado obtuvieron para el largo de la laguna? ______________

d) Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Si hay diferencias analicen el porqué y corrijan lo necesario.

IV. Un procedimiento más para resolver el mismo problema es usando un esquema como el de la derecha.



a) Construyan un $\triangle EDC$ semejante al $\triangle ABC$.

b) ¿Qué dimensiones le dieron al triángulo *EDC*? ______________

c) Establezcan las razones entre los lados correspondientes de los triángulos semejantes y hagan los cálculos para obtener la longitud *AB*.

____

d) ¿Qué resultado obtuvieron para el largo de la laguna? ______________

e) Comparen sus resultados con otros equipos. Si hay diferencias, analicen el porqué y corrijan si fuera necesario.

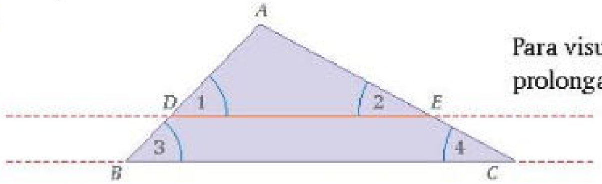
V. En esta lección resolvimos el mismo problema usando diferentes procedimientos y recursos, como muestra de la variedad de puntos de vista que se pueden tener para enfrentar una situación problemática. Exploren otra manera de resolver este mismo problema y, si la encuentran, expónganla ante el grupo.

LECCIÓN 52

Teorema de Tales

Líneas paralelas que cortan a dos lados de un triángulo

I. En la siguiente figura, el $\triangle ADE$ está superpuesto en el $\triangle ABC$ y los lados DE y BC son paralelos.



Para visualizar mejor los ángulos, prolongamos los lados DE y BC.

a) ¿Qué relación hay entre los ángulos 1 y 3? ____________ ¿Y entre los ángulos 2 y 4? ____________ ¿Cómo justifican esas relaciones entre ambos ángulos? ____________

b) De acuerdo con las respuestas anteriores, ¿cómo son el $\triangle ADE$ y el $\triangle ABC$? ____________ Justifiquen su respuesta. ____________

c) Conforme a esta última respuesta, ¿son proporcionales los lados de ambos triángulos? _____ Por lo tanto, las razones entre los lados correspondientes son iguales:

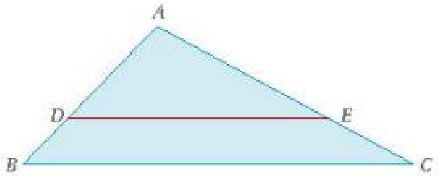
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Midan y anoten las medidas de los lados de ambos triángulos y verifiquen que las razones entre los lados correspondintes son iguales:

d) $\frac{AD}{AB} =$

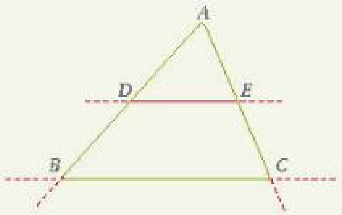
e) $\frac{AE}{AC} =$

f) $\frac{DE}{BC} =$



g) El resultado anterior se puede resumir en el **teorema de Tales**, que establece lo siguiente:

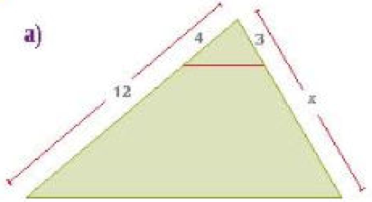
> Si en un triángulo dos de sus lados son cortados por dos rectas paralelas, los segmentos correspondientes que determinan son proporcionales.
>
> En símbolos (completen):
> En el $\triangle ABC$, si AB y AC son cortados por DE y BC, con $DE \parallel BC$, entonces
> $\frac{AD}{\quad} = \frac{\quad}{AC}$



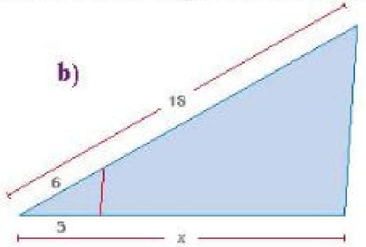
Con apoyo de su profesor, analicen este resultado y coméntenlo entre todo el grupo.

II. En las siguientes figuras, el segmento que corta los lados de cada triángulo es paralelo al tercer lado. Apliquen el teorema de Tales para calcular la longitud del segmento marcado con x.

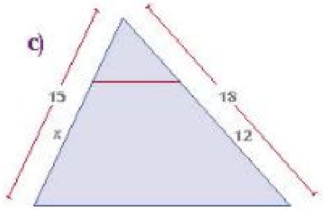
a)



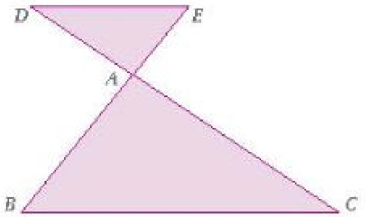
b)



c)



III. En la figura de la derecha, investiguen qué ocurre si la paralela al lado BC se traza en la prolongación de los lados AB y AC del $\triangle ABC$. ¿El $\triangle AED$ y el $\triangle ABC$ son semejantes? Justifiquen su respuesta. ____________



IV. Si $DE \parallel BC$, expliquen por qué es válido cada paso del siguiente razonamiento.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Puesto que $AB = AD + DB$

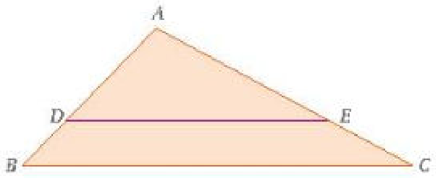
y $AC = AE + EC$

Entonces $$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

$$\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$$

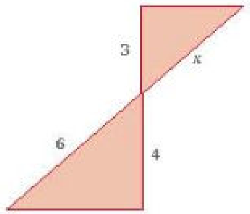
$$\cancel{1} + \frac{DB}{AD} = \cancel{1} + \frac{EC}{AE}$$

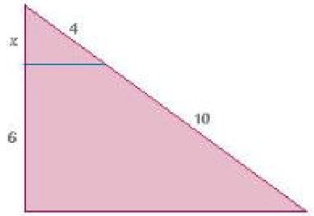
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

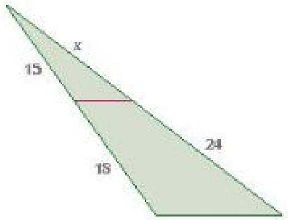


Analicen este resultado y coméntenlo con el resto del grupo.

V. Apliquen los resultados obtenidos en las actividades **III** y **IV** para calcular la longitud del segmento marcado con x, considerando que en cada triángulo el segmento que corta a dos lados o a su prolongación, es paralelo al tercer lado.







VI. Comparen sus respuestas de las actividades **II**, **III**, **IV** y **V** con otras parejas. Corrijan si fuera necesario.

LECCIÓN 53

Recíproco del teorema de Tales

¿Sabes en qué consiste el recíproco de un teorema?

I. Un teorema es una expresión de la forma "si a, entonces b", donde a es la condición para que se cumpla b.

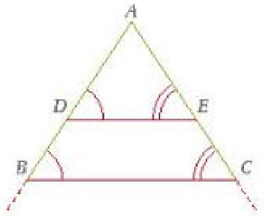
El recíproco del teorema "Si a, entonces b" es "Si b, entonces a".

En símbolos, el teorema de Tales establece que:

> Si AB y BC son cortadas por DE y BC, y $DE \parallel BC$,
> entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Y su recíproco establece que:

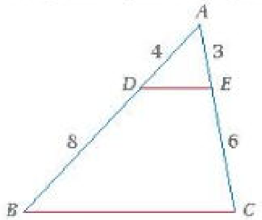
> Si AB y BC son cortadas por DE y BC,
> y $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$
> entonces $DE \parallel BC$.



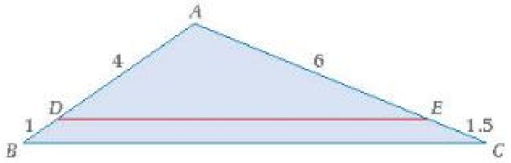
En la lección anterior está enunciado el teorema de Tales para un $\triangle ABC$ cualquiera. Úsenlo como modelo para redactar en su cuaderno el recíproco del teorema de Tales.

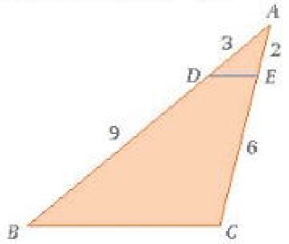
II. Usen el recíproco del teorema de Tales para comprobar que los segmentos DE y BC son paralelos.

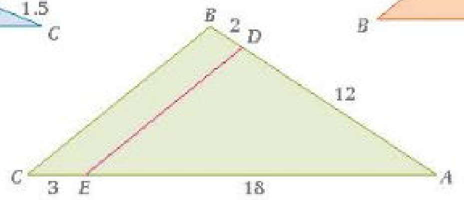
Sugerencia: Verifiquen que el $\triangle ADE$ y el $\triangle ABC$ son semejantes, por lo tanto, los ángulos correspondientes son iguales.

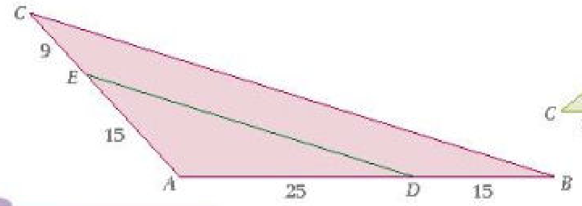


III. En cada caso, apliquen el recíproco del teorema de Tales para comprobar que $DE \parallel BC$.

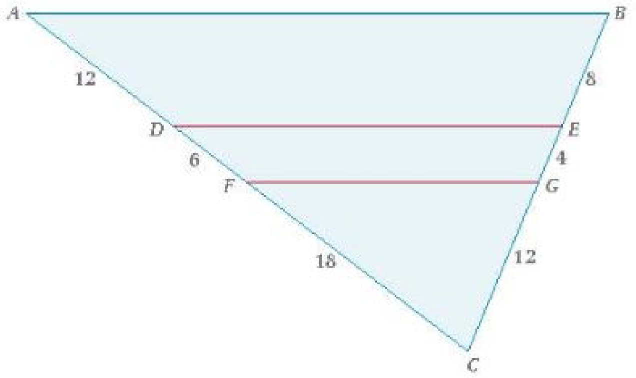




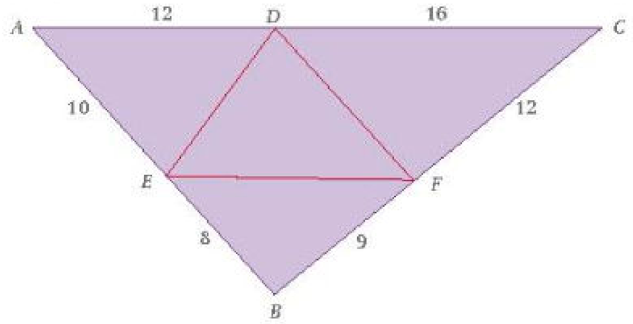




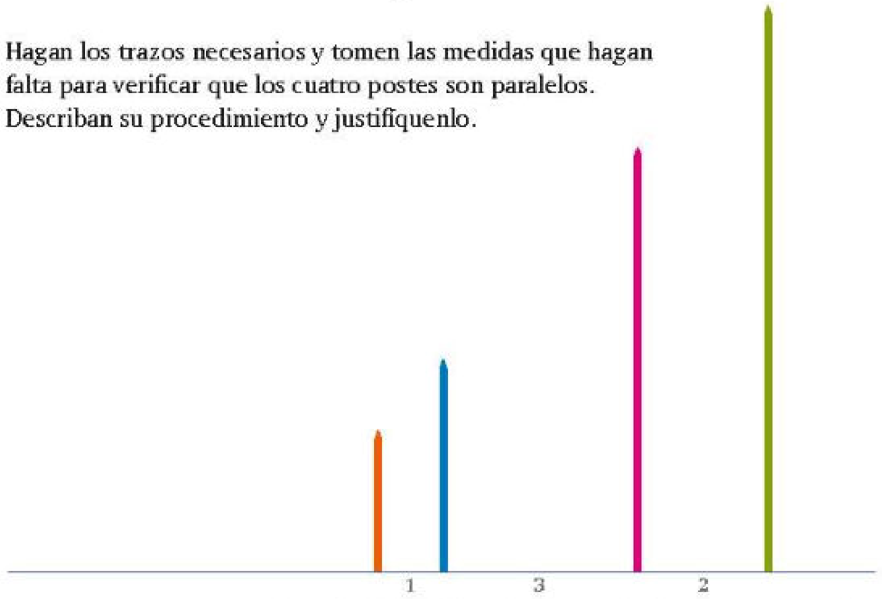
IV. Comprueben que los segmentos AB, DE y FG son paralelos entre sí.



V. En la siguiente figura, de los segmentos DE, EF y DF, ¿cuál es paralelo a uno de los lados del $\triangle ABC$? Justifiquen su respuesta.



VI. Hagan los trazos necesarios y tomen las medidas que hagan falta para verificar que los cuatro postes son paralelos. Describan su procedimiento y justifíquenlo.

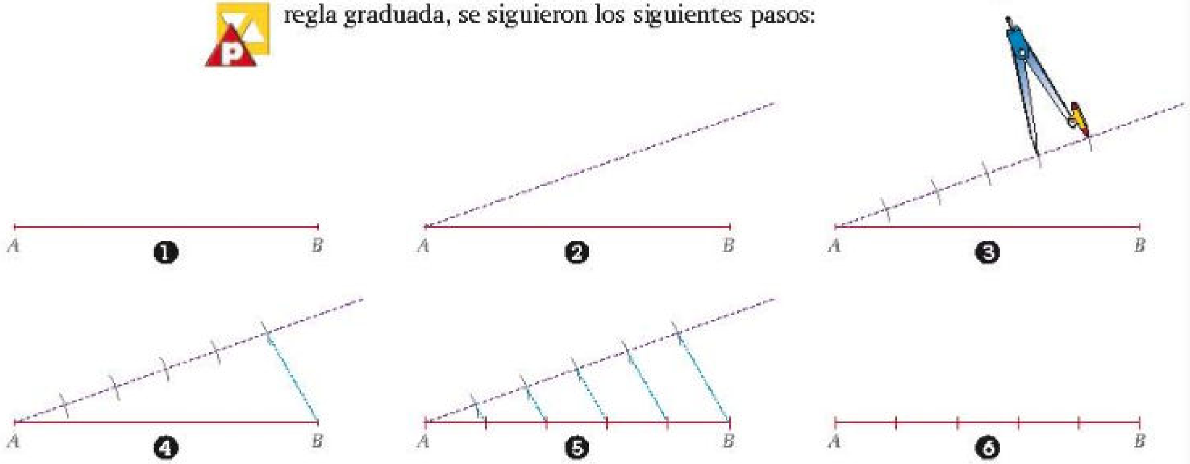


VII. Comparen sus respuestas de todas las actividades de esta lección con otras parejas de compañeros. Si en algunos casos no coinciden en sus resultados, revisen sus procedimientos y corrijan lo necesario.

Aplicaciones del teorema de Tales

Cómo dividir un segmento en partes iguales o en partes proporcionales

I. Para dividir un segmento AB en cinco segmentos de la misma longitud, sin usar regla graduada, se siguieron los siguientes pasos:



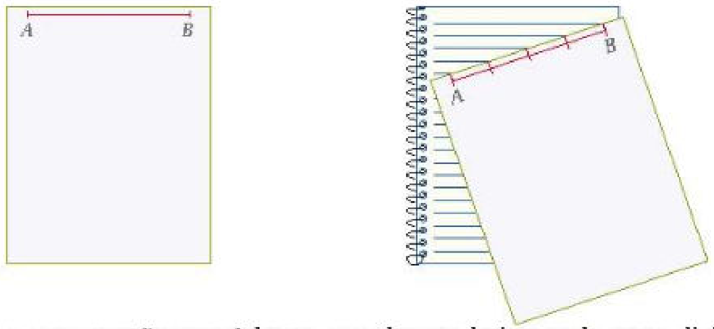
a) Analicen lo que se hizo en cada paso para dividir el segmento AB en cinco partes iguales.

b) Un compañero explique a otro, al mismo tiempo que hace los trazos, cómo dividir en tres partes un segmento de cualquier longitud, sin usar regla graduada.

c) Ahora, el segundo compañero explique al primero cómo dividir un segmento en siete partes iguales.

d) Escriban en su cuaderno las instrucciones para dividir un segmento en cuatro partes iguales, sin usar regla graduada, y argumenten por qué es válido este procedimiento.

II. Otra manera de dividir un segmento en partes iguales es usando una hoja rayada de su cuaderno. Si requieren dividir el segmento AB en cuatro partes iguales pueden hacer lo que se muestra en las siguientes figuras:



Explica a un compañero qué hacer, usando una hoja rayada, para dividir un segmento en dos, tres, cinco, seis partes iguales. Justifica este procedimiento.

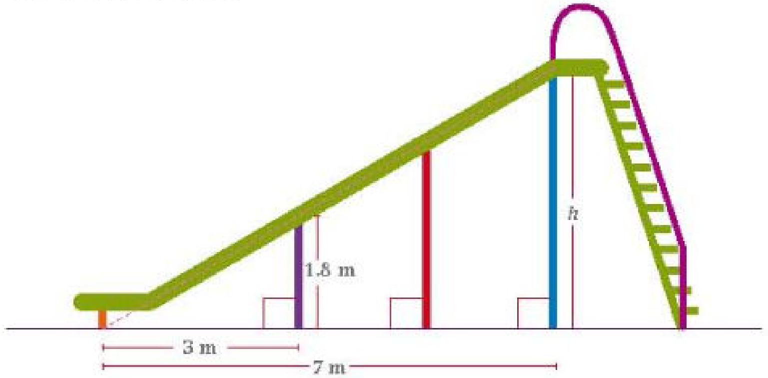
III. Algunas costureras tienen trazadas en su mesa de trabajo líneas paralelas a la misma distancia, para facilitarles poner las marcas donde irán los botones y ojales en las camisas que fabrican.

Una costurera decide poner seis botones en una camisa, distribuidos de manera uniforme. Para ello hace una marca en el lugar donde irá el primer botón y otra marca donde irá el último botón, luego hace coincidir la primera marca con una de las líneas paralelas y la última marca con una sexta línea paralela de la mesa. Para terminar, hace marcas en los puntos intermedios donde cruzan otras cuatro paralelas.

a) Marquen sobre el dibujo de la camisa dónde irían los botones intermedios.

b) Justifiquen por qué es válido el procedimiento de la costurera.

IV. La siguiente ilustración muestra una resbaladilla de un parque de juegos para niños. Calculen su altura h.



V. Sin usar regla graduada, dividan el segmento AB en dos partes, tales que la razón entre las medidas de esas partes sea $\frac{3}{4}$, es decir, encuentren un punto P entre A y B tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$

VI. Comparen sus respuestas de las actividades **IV** y **V** con las respuestas de otras parejas del grupo. ¿Coinciden? Si no es así, analicen por qué y corrijan lo necesario.

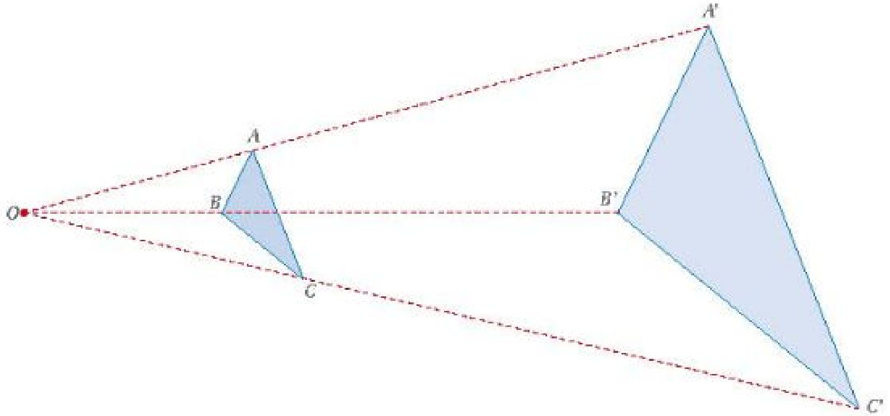
Construcción de figuras homotéticas (1)

Razón de homotecia y centro de homotecia

I. En las lecciones 32 a 37, estudiamos la traslación, la reflexión y la rotación de figuras, las cuales son transformaciones que conservan la forma y el tamaño de las figuras originales. En ésta y las lecciones siguientes estudiaremos una transformación que conserva la forma, pero aumenta o disminuye el tamaño de las figuras: la **homotecia**.

Para tener una idea de lo que es una homotecia, piensen en un proyector de cine, donde el centro es el foco del proyector, considerado como un punto, la figura original está en la cinta de celuloide y la figura transformada se ve en la pantalla.

a) En su cuaderno, tracen un $\triangle ABC$ y un punto O, al que llamaremos *centro*. (El punto O es como el foco del proyector y el $\triangle ABC$ como la figura que se proyectará en la pantalla).



b) Tracen una recta que pase por O y el vértice A. Para encontrar A' midan la distancia OA y sobre esta recta, a partir de O, marquen el punto A' al triple de la distancia OA.

c) Tracen la recta OB. Para el punto B' midan la distancia OB y sobre esta recta, a partir de O, marquen el punto B' al triple de la distancia OB.

d) Para el punto C' hagan lo mismo.

e) Unan los puntos $A'B'C'$. El $\triangle A'B'C'$ es la figura homotética del $\triangle ABC$.

f) A simple vista, parece que el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$ son semejantes. ¿Cómo podrían comprobarlo?

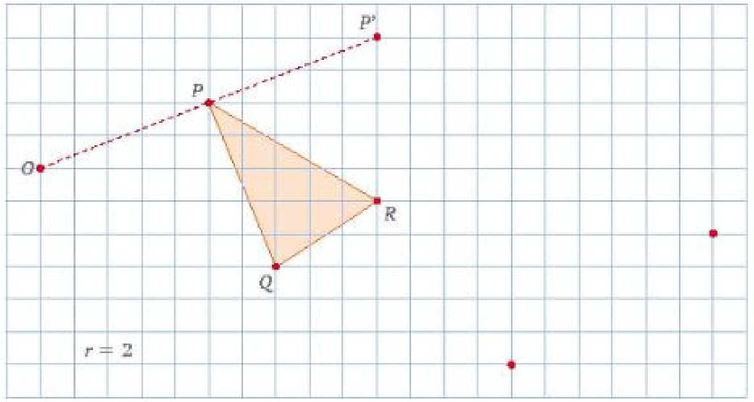
II. Apoyados por su profesor, analicen entre todo el grupo la manera como se hizo la construcción de la figura homotética en la actividad **I**. Usando el recíproco del teorema de Tales justifiquen por qué el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$ son semejantes.

III. En la figura de la actividad **I**, por la manera como se hizo la construcción, tenemos que:

$$\frac{OA'}{OA} = 3 \qquad \frac{OB'}{OB} = 3 \qquad \frac{OC'}{OC} = 3$$

En ese caso, se dice que la razón de homotecia r es 3.

a) Completen la figura homotética del $\triangle PQR$, con centro de homotecia O y $r = 2$.

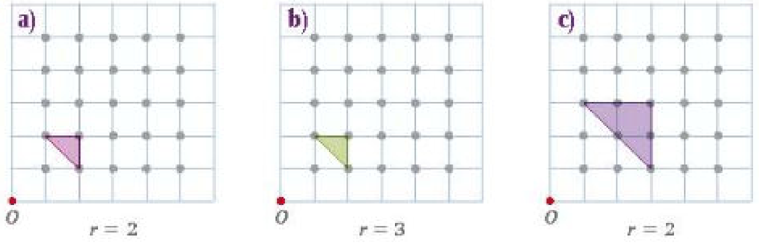


b) Midan los lados del $\triangle PQR$ y los del $\triangle P'Q'R'$. ¿Qué relación hay entre ellos? ____________

c) ¿Qué relación encuentran entre la razón de homotecia y la longitud de los lados de la figura homotética? ____________

d) ¿Hay alguna relación entre el trazo de figuras homotéticas y el trazo de figuras a escala? _____ Justifiquen su respuesta. ____________

IV. En cada uno de los siguientes geoplanos, tracen la figura homotética con centro en O y razón de homotecia r.



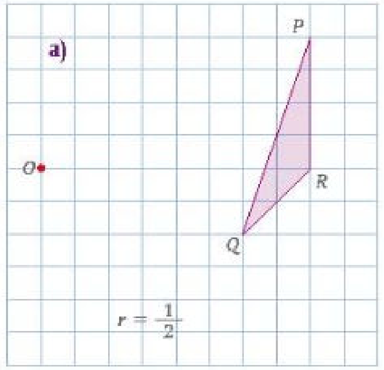
V. Comparen sus respuestas de las actividades **III** y **IV** con las demás parejas de compañeros. Si hay diferencias, analicen las razones y corrijan lo que sea necesario.

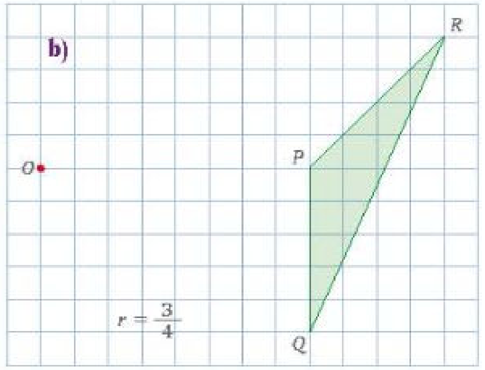
LECCIÓN 56

Construcción de figuras homotéticas (2)

Razones de homotecia fraccionarias y negativas

I. Tracen el triángulo homotético $P'Q'R'$ con centro en O y razón de homotecia r.





c) Comenten con otros equipos de compañeros cómo trazaron los triángulos homotéticos en a) y b) y justifiquen su procedimiento.

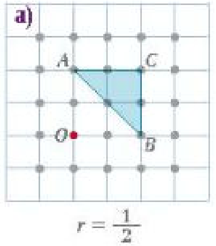
d) Cuando la razón de homotecia es menor que 1, ¿cómo es la figura homotética respecto de la figura original? ______ Justifiquen su respuesta. ______

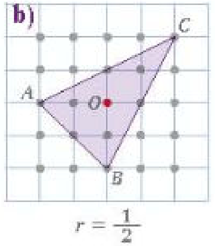
e) Hemos usado razones de homotecia mayores que 1 y menores que 1.

- Si la razón de homotecia es mayor que 1, entonces ______
- Si la razón de homotecia es menor que 1, entonces ______
- ¿Qué ocurre si la razón de homotecia es igual a 1? ______

Para responder a esta última pregunta, tracen en su cuaderno una figura, definan un centro y apliquen una homotecia cuya razón sea igual a 1. Comenten su respuesta y den argumentos que la justifiquen.

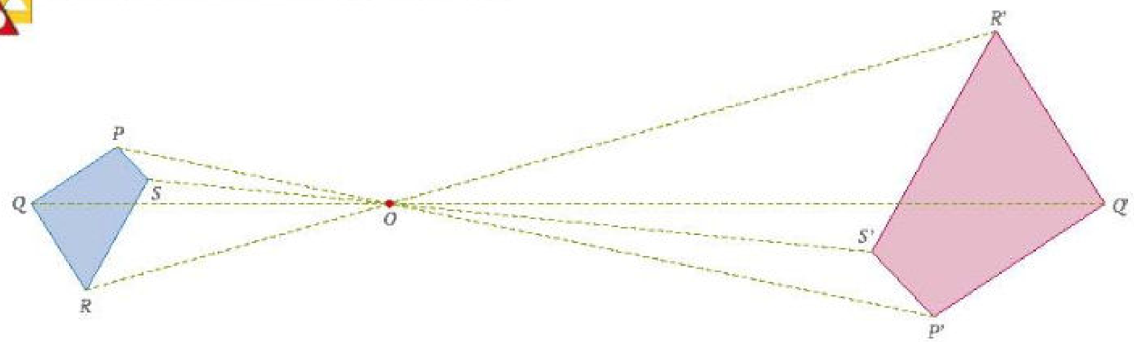
II. Tracen los triángulos homotéticos de cada uno de los triángulos ABC, con centro en O y $r = \frac{1}{2}$.





c) Comenten con otras parejas de compañeros sus respuestas y justifiquen por qué en b) la figura homotética resultó así.

III. En la siguiente figura, el cuadrilátero original $PQRS$ se amplificó al doble, dando como resultado la figura homotética $P'Q'R'S'$.



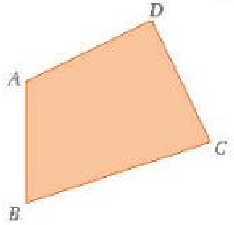
Puesto que la figura original y la homotética están en lados opuestos del centro O, decimos que la razón es negativa.

a) ¿Cuál es la razón de esta homotecia? ______

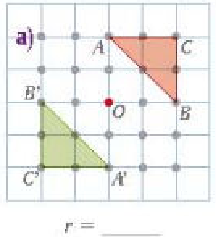
b) ¿Dónde estaría la imagen homotética del cuadrilátero $PQRS$ si la razón fuera -1? ______

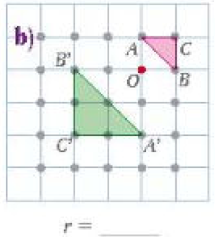
c) ¿Dónde estaría si la razón de homotecia fuera -4? ______

IV. Tracen la figura homotética del cuadrilátero $ABCD$, con razón de homotecia $-\frac{1}{2}$. Elijan el centro de homotecia O.



V. En cada uno de los siguientes geoplanos está trazada una figura ABC y su homotética $A'B'C'$. ¿Cuál es, en cada caso, la razón de homotecia?



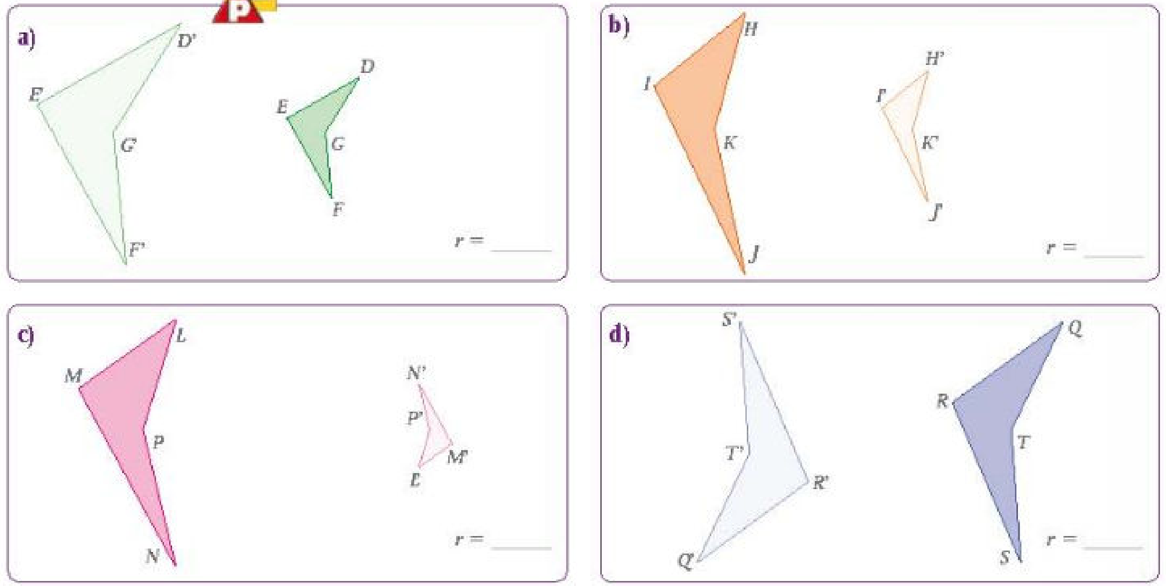


VI. En todas las actividades de esta lección, contrasten sus respuestas con las de otras parejas de compañeros. Si hay diferencias, analicen el porqué y con ayuda de su maestro analicen cuáles son las correctas.

Construcción de figuras homotéticas (3)

Determinación del centro y la razón de homotecia

I. En cada una de las siguientes figuras, encuentren el centro O y la razón de homotecia r.



II. En esta actividad usaremos □ en lugar de la palabra *cuadrilátero*.

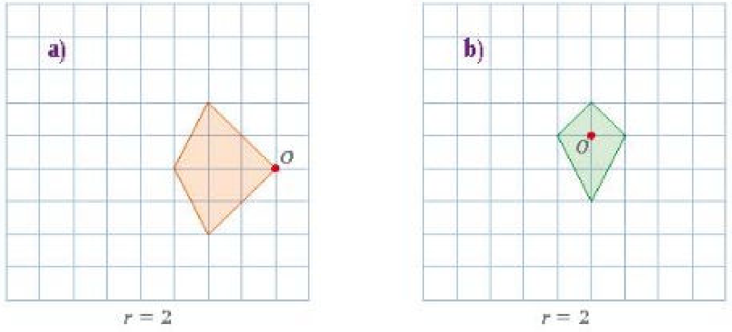
En la actividad **I**, observen que en **a)** el □$DEFG$ se transformó mediante la homotecia con centro en O y $r = 2$ en el □$D'E'F'G'$. ¿Qué razón de homotecia se requiere aplicar al □$D'E'F'G'$ para obtener el □$DEFG$? ____________

Completen la siguiente tabla, referida a las figuras trazadas en **a)**, **b)**, **c)** y **d)** de la actividad **I**.

a) □$DEFG$	$\xrightarrow{r = 2}$	□$D'E'F'G'$	$\xrightarrow{r = }$	□$DEFG$
b) □$HIJK$	$\xrightarrow{r = }$	□$H'I'J'K'$	$\xrightarrow{r = }$	□$HIJK$
c) □$LMNP$	$\xrightarrow{r = }$	□$L'M'N'P'$	$\xrightarrow{r = }$	□$LMNP$
d) □$QRST$	$\xrightarrow{r = }$	□$Q'R'S'T'$	$\xrightarrow{r = }$	□$QRST$

e) ¿Qué relación encuentran entre la razón de homotecia que transforma el cuadrilátero original en el cuadrilátero homotético y la razón que transforma el cuadrilátero homotético en el original? ____________

III. De cada una de las siguientes figuras, traza su homotética. En cada caso están dados su centro O y su razón de homotecia r.



IV. Tracen la figura homotética de los círculos, dados su centro y razón de homotecia.

a)

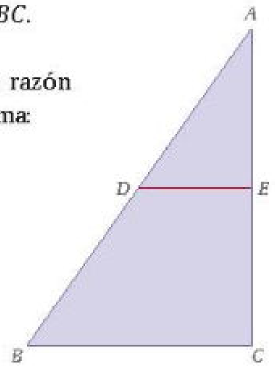
b)

V. En la siguiente figura, $DE \parallel BC$.

Determinen el centro y la razón de homotecia que transforma:

a) El $\triangle ADE$ en el $\triangle ABC$

b) El $\triangle ABC$ en el $\triangle ADE$



VI. Compartan sus respuestas de esta lección con otras parejas del grupo. Si hay diferencias analicen el porqué y, de acuerdo con su maestro, expongan sus resultados y discútanlos con el resto del grupo.

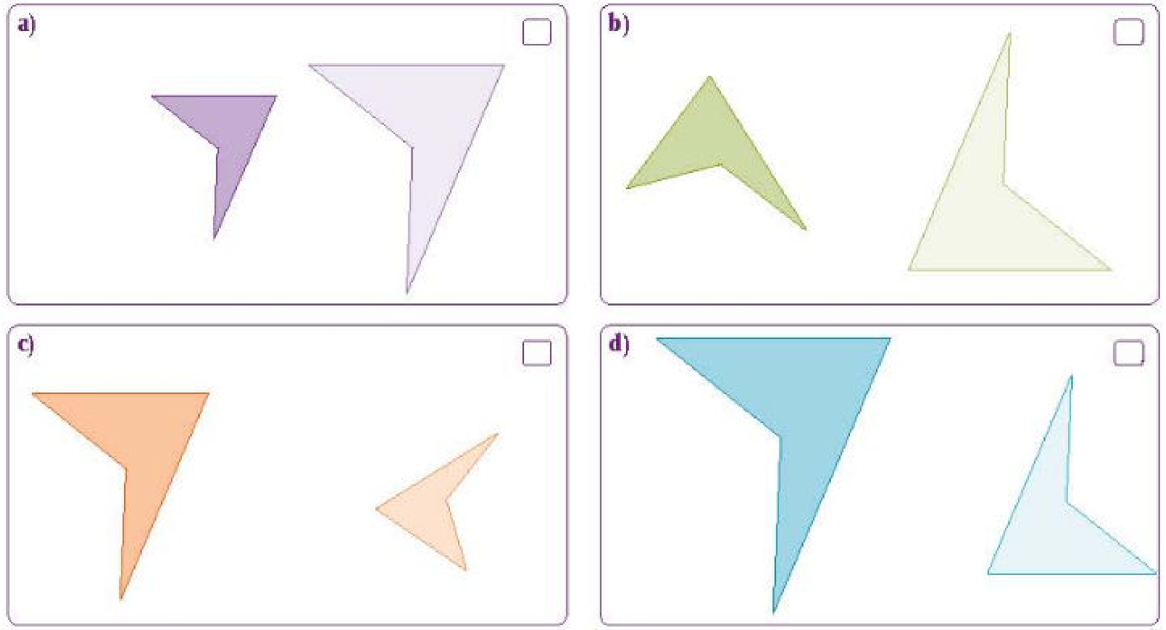
LECCIÓN 58

Propiedades de la homotecia

Cambio y permanencia en figuras homotéticas

I. Los siguientes pares de figuras son semejantes, pero no todas son homotéticas.

Marquen con ✓ las figuras homotéticas y con ✗ las no homotéticas.



e) ¿Cómo reconocen a simple vista que dos figuras semejantes también son homotéticas?, es decir, ¿qué propiedad o propiedades tienen las figuras semejantes y homotéticas que no tienen las semejantes no homotéticas?

Para responder a esta pregunta, usen las figuras anteriores que servirán para analizar en la siguiente tabla las propiedades de las figuras semejantes homotéticas y de las semejantes no homotéticas.

En la celda correspondiente marquen con ✓ si cumple con la propiedad considerada y con ✗ si no cumple.

Propiedades	Figuras semejantes y homotéticas	Figuras semejantes y no homotéticas
Ángulos iguales		
Lados correspondientes proporcionales		
Lados correspondientes paralelos		

f) ¿Qué conclusión obtienen de esta actividad? ____________________

____

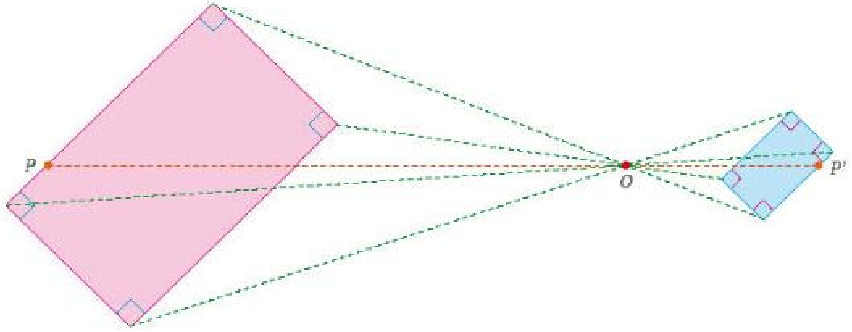
II. Las propiedades que no varían mediante una transformación se llaman **invariantes**. Para analizar las propiedades invariantes de una homotecia, tracen en su cuaderno tres paralelogramos y a cada uno apliquen una homotecia, con centro donde decidan y razón de homotecia un número:

a) Entero mayor que 1

b) Entero menor que 1

c) Fraccionario entre 0 y –1

En la siguiente ilustración se muestra cómo podría trazarse el caso c).



En las tres ilustraciones que hicieron, analicen cada una de las propiedades enlistadas en la primera columna de la siguiente tabla. Como apoyo, pueden plantearse las preguntas propuestas en la segunda columna.

Propiedad por analizar	Pregunta posible	
FIGURA ORIGINAL	FIGURA HOMOTÉTICA	SÍ/NO
Longitud de segmentos	¿El segmento transformado tiene la misma longitud que el segmento original?	
"Estar entre" dos puntos	¿El punto considerado, "está entre" los puntos correspondientes de la figura homotética?	
Paralelismo de rectas	¿Las rectas correspondientes de la figura homotética también son paralelas?	
Perpendicularidad de rectas	¿Las rectas correspondientes de la figura homotética también son perpendiculares?	
Colinealidad de puntos	¿Los puntos correspondientes de la figura homotética también son colineales?	
Sentido de los ángulos	¿Los ángulos correspondientes de la figura homotética tienen el mismo sentido?	

En resumen, las propiedades invariantes de una homotecia son:

____

____

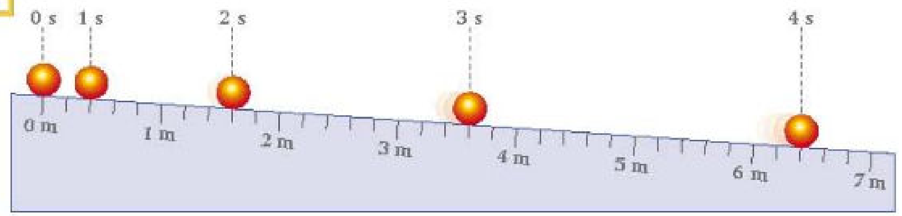
III. Comparen sus respuestas de las actividades **I** y **II** con otros equipos y con ayuda de su profesor obtengan conclusiones.

LECCIÓN 59

Proporcionalidad y funciones

En búsqueda de la relación oculta

I. Sobre un plano inclinado se hace rodar una canica y cada segundo su posición es la que se muestra en la figura.



Anoten en la tabla de abajo la distancia y recorrida por la canica, después de x segundos de haber empezado a rodar.

x (tiempo)	0	1	2	3	4
y (distancia)					

¿Cuántos metros suponen que habrá recorrido la canica a los 6 segundos? ______

Cuando se asigna un valor a x, el valor de y queda determinado de manera única, por lo tanto, y es ______________ de x.

El objetivo es encontrar una fórmula que represente la relación de y con x.

Sin embargo, el comportamiento de los valores es diferente en ambas variables, ya que x aumenta regularmente y en cambio y no lo hace. Por lo tanto, se puede afirmar que y (es/no es) __________ proporcional a x.

A la tabla anterior se le intercala un segundo renglón. Anoten ahí los valores de x^2.

x	0	1	2	3	4
x^2					
y					

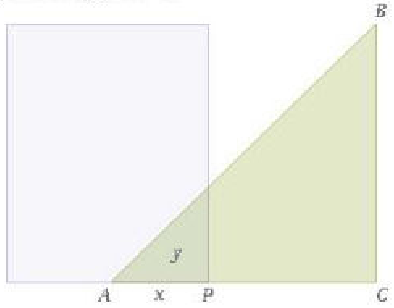
Ahora, al comparar los valores de y con los de x^2 se encuentra que y es igual a x^2 multiplicada por ______

Por lo tanto, y es proporcional a x^2 y la ecuación que las relaciona es:

$$y = \_\_\_\_ x^2$$

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y si hay diferencias, discútanlas y corrijan lo necesario.

II. Sobre el triángulo rectángulo isósceles ABC se coloca una hoja rectangular de plástico transparente, como se muestra en la figura.



Si la medida de AP es x cm, el área de la región traslapada es y cm².

a) Escriban la ecuación que relaciona y con x.
b) Anoten los valores faltantes en la siguiente tabla.

x	4	6	10	15	20
y			50		

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y aclaren dudas.

III. Para $y = x^2$, anoten en la tabla los valores faltantes, y en el plano cartesiano marquen los puntos cuyas coordenadas correspondan a los valores que se muestren en la tabla.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y			4					9	

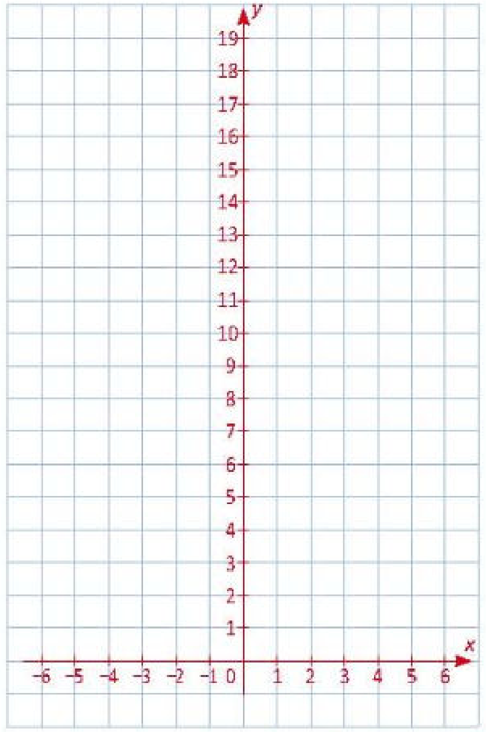
¿Son suficientes los puntos marcados para trazar una gráfica exacta? ______

Para x entre –1 y 1, hagan una nueva tabla como la anterior y asignen a x valores que difieran en 0.1, calculen el valor de y y marquen en el plano los puntos que tengan esas coordenadas.

Unan todos los puntos marcados de acuerdo al esquema generado entre los valores –1 y 1 de x.

La gráfica resultante se llama **parábola**.

Comparen su gráfica con las de otros compañeros y comprueben que estén bien hechas.



LECCIÓN 60

La función $y = ax^2$ (1)

Los efectos gráficos del coeficiente

I. Analicen la gráfica de la función $y = x^2$ de la lección anterior.

a) Si $x < 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ¿aumenta o disminuye? ____________

b) Si $x > 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ¿aumenta o disminuye? ____________

Evidentemente, si $x = 0$ entonces $y = 0$, es decir, la gráfica ____________ por el origen. Ese punto de la gráfica se llama **vértice** de la parábola.

c) El valor de y no puede ser ____________ que cero.

d) El valor de y ________ igual cuando los valores de x son simétricos, es decir, cuando son de signo distinto pero ambos están a la misma distancia del origen.

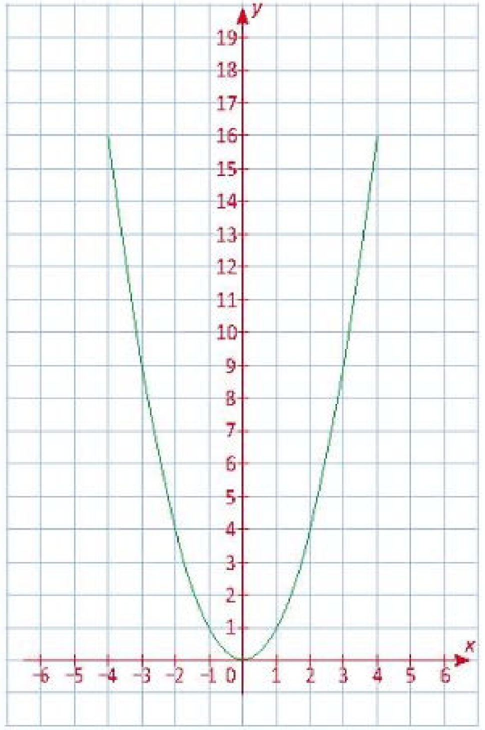
e) La gráfica ________ simétrica respecto al eje y.

II. Consideren las ecuaciones

$$y = 3x^2$$
$$y = \frac{x^2}{2}$$

Anoten los valores en la tabla, tracen las gráficas en el plano cartesiano (de ser posible con colores distintos) y contesten las preguntas.

x	$3x^2$	$\frac{x^2}{2}$
–2.5		
–2		
–1		
0		
1		
2		
2.5		



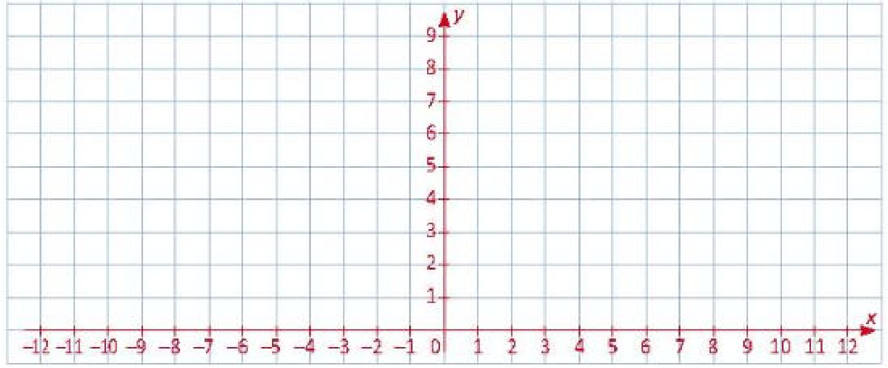
a) Expliquen las diferencias de las nuevas gráficas respecto de la gráfica de $y = x^2$.

____

b) Para las nuevas gráficas, ¿siguen siendo verdaderas las características enunciadas en los incisos **a)** – **e)** de la actividad **I**? ____________

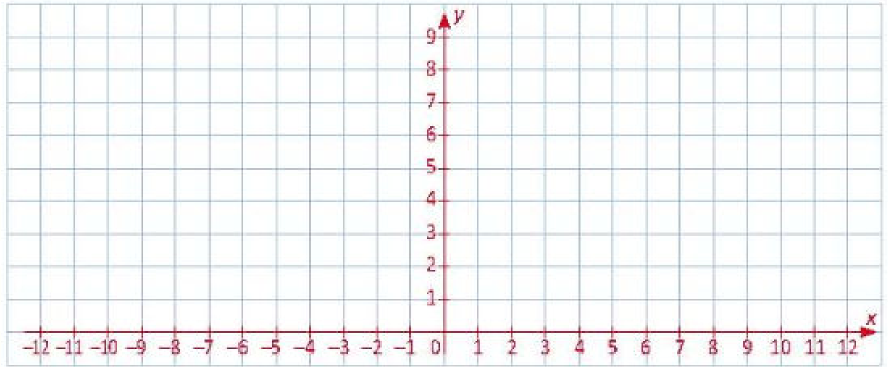
III. Consideren la ecuación $y = ax^2$ con $0 < a$.

a) Si $1 < a$, ¿cuál es la diferencia de la gráfica respecto del caso en que $a = 1$? Escriban dos ejemplos de ecuaciones con $1 < a$, hagan las tablas para algunos valores de x, (negativos, cero y positivos) y tracen las gráficas.



Para las nuevas gráficas, ¿siguen siendo verdaderas las características enunciadas en los incisos **a)** – **e)** de la actividad **I**? ____________

b) Si $0 < a < 1$, ¿cuál es la diferencia de la gráfica respecto del caso en que $a = 1$? Escriban dos ejemplos de ecuaciones con $0 < a < 1$, hagan las tablas para algunos valores de x, (negativos, cero y positivos) y tracen las gráficas.



Para las nuevas gráficas, ¿siguen siendo verdaderas las características enunciadas en los incisos **a)** – **e)** de la actividad **I**? ____________

Comparen sus gráficas con las de otros compañeros y si hay diferencias importantes corrijan lo necesario hasta que todos estén de acuerdo y no tengan dudas.

La función $y = ax^2$ (2)

El signo y la gráfica, unidos

En la lección anterior analizaron la función cuadrática $y = ax^2$ con el valor de a positivo, y comprobaron el efecto que produce en su gráfica el asignar distintos valores al parámetro a, por ejemplo, entre 0 y 1, y mayores que 1. En todos los casos, sin embargo, la parábola tenía su vértice en el origen y estaba abierta hacia arriba.

I. Completen la siguiente tabla, en una hoja de papel cuadriculado tracen la gráfica de la función $y = -x^2$ de acuerdo a los valores de la tabla y completen los enunciados que siguen.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-x^2$		-9							

a) El vértice de la parábola está en ____________________

b) ¿Hacia dónde se abre la parábola? ____________________

c) Si $x < 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ____________________

d) Si $x > 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ____________________

Completen las siguientes afirmaciones y compárenlas con las de la lección anterior.

e) El valor de y no puede ser ____________ que cero.

f) El valor de y _____ igual cuando los valores de x son simétricos, es decir, cuando son de signo distinto pero ambos están a la misma distancia del origen.

g) La gráfica _____ simétrica respecto al eje y.

II. Consideren las ecuaciones

$$y = -2x^2$$
$$y = \frac{-x^2}{3}$$

Anoten en la tabla los valores faltantes, tracen las gráficas en el plano cartesiano (de ser posible con colores distintos) y contesten las preguntas.

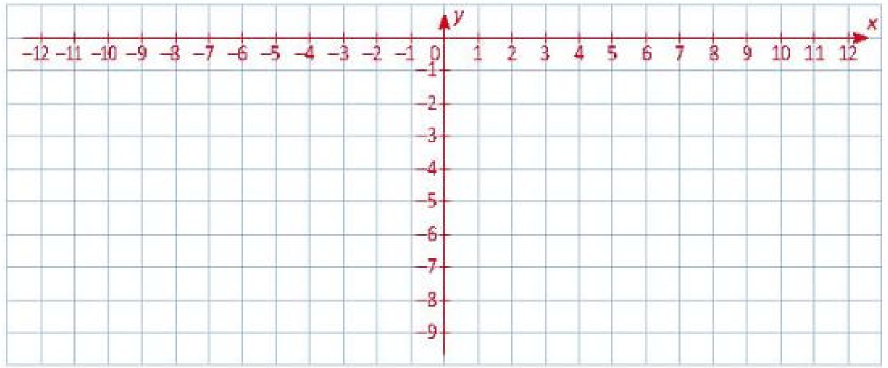
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-2x^2$	-32								
$\frac{-x^2}{3}$								-3	

a) ¿Cuáles son las diferencias de las nuevas gráficas respecto de la de $y = -x^2$?

____

b) Para las nuevas gráficas, ¿siguen siendo verdaderas las características enunciadas en los incisos **a)** – **g)** de la actividad **I**? ____________________

____



III. Consideren la ecuación $y = -ax^2$ con $0 < a$.

a) Si $1 < a$, ¿cuál es la diferencia de la gráfica respecto del caso en que $a = 1$? Escriban dos ejemplos de ecuaciones con $1 < a$, hagan las tablas para algunos valores de x, (negativos, cero y positivos) y tracen las gráficas en papel cuadriculado.

b) Verifiquen si las gráficas que trazaron conservan las características mencionadas en los incisos **a)** – **g)** de la actividad **I**.

c) Si $0 < a < 1$, ¿cuál es la diferencia de la gráfica respecto del caso en que $a = 1$? Escriban dos ejemplos de ecuaciones con $0 < a < 1$, hagan las tablas para algunos valores de x, (negativos, cero y positivos) y tracen las gráficas en papel cuadriculado.

d) Verifiquen si las gráficas que trazaron conservan las características mencionadas en los incisos **a)** – **g)** de la actividad **I**.

Comparen sus gráficas con las de otros compañeros. Si hay diferencias, discútanlas y corrijan lo necesario hasta que todos estén de acuerdo y no tengan dudas.

IV. Escriban un resumen en el que, a partir de la función $y = x^2$ ilustrada con su gráfica.

a) Modifiquen la función multiplicando x^2 por un coeficiente positivo. Analicen esta modificación en dos casos, 1er. caso: cuando ese coeficiente es mayor que 1, 2o. caso: cuando es menor que 1 pero mayor que 0. En ambos casos hagan una tabla asignando valores a la variable x y calculando los correspondientes a y. En cada caso, tracen la gráfica y describan el cambio que el coeficiente produjo en la gráfica de la función inicial.

b) Modifiquen la función multiplicando x^2 por un coeficiente negativo y también separen el análisis en dos casos, cuando el coeficiente es menor que -1, y cuando su valor esté entre -1 y 0. En esta segunda parte, la función inicial debe ser

$$y = -x^2 ,$$

es decir, con el coeficiente $a = -1$.

Comparen su resumen con los de otros equipos y, con la coordinación de su profesor, elijan a uno para que exponga su trabajo a todo el grupo.

LECCIÓN 62

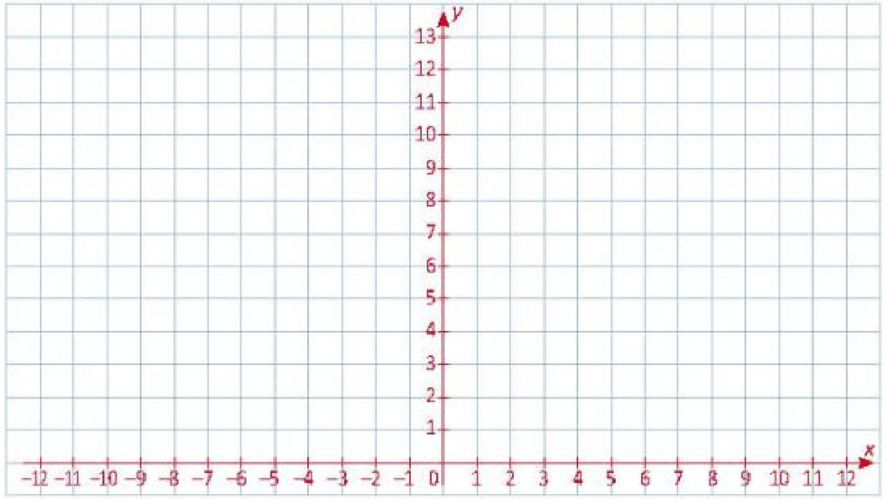
La función $y = ax^2 + b$

Los parámetros, la inversión de las variables y sus consecuencias

Una variante muy natural a la ecuación de una parábola es la que resulta de sumarle un número a la ecuación $y = x^2$ con que se inició este tema.

I. Escriban en la siguiente tabla los valores de y para la función $y = x^2 + 3$, tracen la gráfica de la función y completen los enunciados que siguen.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y								12	



a) Cuando $x = 0$, el valor de y es ______

b) El vértice de la parábola está en ______________________

c) La gráfica de la parábola se abre hacia ______________________

d) Si $x < 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ______________________

e) Si $x > 0$ y su valor se incrementa, el valor de y ______________________

f) El valor de y no puede ser __________ que 3.

g) La gráfica es simétrica respecto al eje ______.

II. Después de llevar a cabo la actividad anterior, resulta casi obligado explorar el caso en que a la ecuación original $y = x^2$ se le suma un número negativo. Examinen, por ejemplo, la ecuación $y = x^2 - 4$. Construyan una tabla de valores, tracen la gráfica en su cuaderno o en una hoja de papel cuadriculado y repitan y completen los enunciados de la actividad anterior. ¿Qué cambio debe hacerse en el caso del inciso f)? ______________________

III. Una pregunta que se formula de manera natural después de haber examinado las dos ecuaciones anteriores es la siguiente: ¿Se alterarán las gráficas de las ecuaciones en **I** y **II** de la misma manera que las de lecciones anteriores si se agrega un coeficiente a x^2? Para contestar la pregunta, hagan lo que se indica.

a) En la ecuación $y = x^2 + 3$ agreguen a x^2 un coeficiente positivo que sea mayor a 1. Construyan la tabla de valores y tracen la gráfica.

b) En la misma ecuación, agreguen a x^2 un coeficiente a tal que $0 < a < 1$. Construyan la tabla de valores y tracen la gráfica.

En ambos casos, es recomendable trazar la gráfica en el mismo plano cartesiano en que esté la gráfica anterior, de preferencia, usando valores diferentes.

c) En la ecuación $y = x^2 - 4$ agreguen a x^2 un coeficiente negativo que sea menor que –1. Construyan la tabla de valores y tracen la gráfica.

d) En la misma ecuación, agreguen a x^2 un coeficiente a tal que $-1 < a < 0$. Construyan la tabla de valores y tracen la gráfica.

En ambos casos, es recomendable trazar la gráfica en el mismo plano cartesiano en que esté la gráfica anterior.

Hasta ahora, se han examinado parábolas cuyas ecuaciones son de la forma $y = ax^2 + b$, en las que se asigna de manera arbitraria un valor a la variable x y éste determina el valor de la variable y. Por esta razón, a x se le llama **variable independiente** y a y **variable dependiente**.

¿Qué ocurre si esa relación entre las variables se invierte?

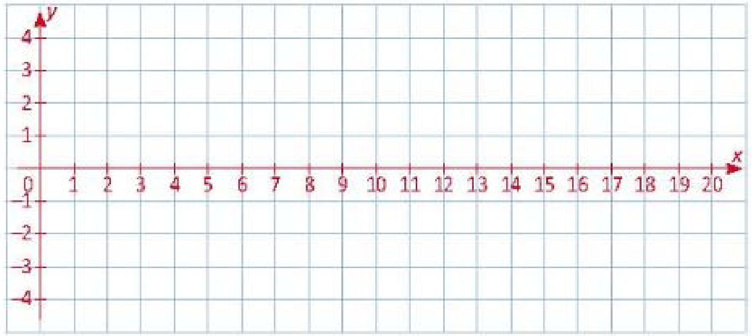
IV. Examinen la ecuación $x = y^2$. Completen los valores de la tabla siguiente, en la que se han asignado valores arbitrarios a y para, en base a ellos, calcular los valores de x.

y	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x	16								

a) En el plano cartesiano de la derecha tracen la gráfica con los valores de la tabla. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica.

b) ¿Qué tipo de gráfica resultó?

c) Escriban tres enunciados que describan a la gráfica.



V. En su cuaderno o en una hoja de papel cuadriculado, construyan una tabla de valores para la ecuación $x = -y^2$, tracen su gráfica y escriban los enunciados suficientes para describirla.

LECCIÓN 63

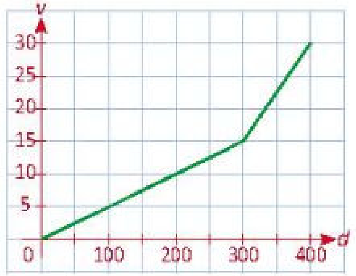
Gráficas rectas y curvas (1)

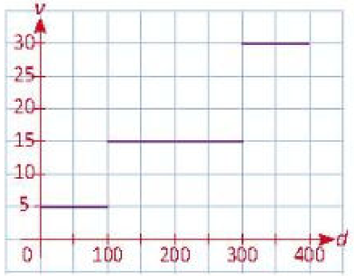
¿Qué tan rápido es el cambio?

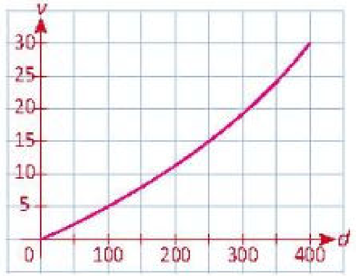
I. Un atleta especialista en correr 400 metros planos entrena de la siguiente manera:

a) Camina los primeros 100 m.
b) Trota los siguientes 200 m.
c) Corre los últimos 100 m hasta alcanzar su máxima velocidad al final.

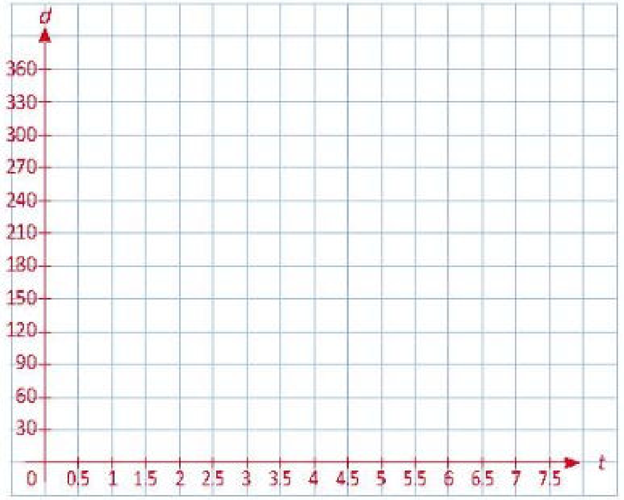
¿Cuál de las siguientes gráficas describe su recorrido por la pista?







II. Para realizar un censo, unos encuestadores viajan en camioneta hasta una población ubicada en la sierra. Salen de la capital del estado por una autopista y recorren 90 km en una hora, después viajan 60 km en una carretera vecinal durante otra hora, para continuar 30 km por un camino de terracería una hora más. Hacer la encuesta a la población les toma 90 minutos y regresan a la ciudad recorriendo los mismos caminos, distancias y tiempos que de ida. En el siguiente plano cartesiano tracen una gráfica que describa sus desplazamientos, marcando en el eje vertical la distancia a la que se encuentran del punto de partida y en el horizontal el tiempo en horas. Luego contesten las preguntas que siguen.



a) ¿Qué significa que la gráfica suba más rápido en un período de tiempo que en otro? ____________

____

b) ¿Qué significa que la gráfica tenga un segmento horizontal en un período de tiempo? ____________

____

III. En una alberca vacía se vierte agua durante tres horas y durante la siguiente hora se agrega cloro líquido por un tubo del mismo diámetro que el del agua. En las siguientes dos horas sólo se agrega agua y en la siguiente hora se agrega cloro de nuevo. El agua sigue fluyendo a la alberca dos horas más, al final de las cuales queda llena y se cierra la llave.

a) Si la llave del agua se mantuvo abierta hasta el final, ¿durante cuánto tiempo se vertió agua a la alberca? ____________

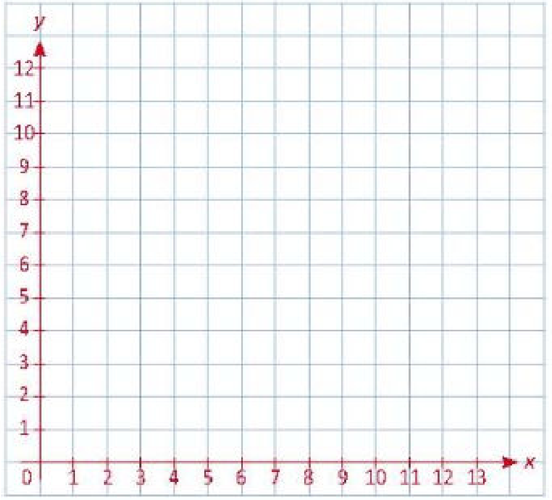
b) ¿Durante cuánto tiempo se le vertió cloro? ____________

c) Si ambas llaves vertían la misma cantidad de líquido, ¿cuál es la razón del cloro respecto del agua cuando la alberca está llena? ____________

d) En el plano cartesiano, registren en el eje vertical el volumen de líquido contenido en la alberca y en el eje horizontal el tiempo. Tracen una gráfica que describa el proceso de llenado de la alberca.

Si tomamos en cuenta que en la alberca se vierte sólo agua o agua y cloro simultáneamente, en función de los distintos períodos de tiempo, conviene separar éstos de la siguiente manera:

$0 < x \leq 3$
$3 < x \leq 4$
$4 < x \leq 6$
$6 < x \leq 7$
$7 < x \leq 9$



e) A la derecha de cada uno de los intervalos de valores que toma x escriban una expresión algebraica que relacione el volumen y con el tiempo x, suponiendo que la cantidad de agua se exprese como $y = ax$ y la de cloro se exprese como $y = cx$.

f) La gráfica trazada en el inciso **d)**, ¿tiene algún segmento horizontal? ____________

g) Justifiquen su respuesta a la pregunta anterior. ____________

IV. Analicen las gráficas vistas en esta lección y escriban una conclusión sobre la manera en que deben interpretarse. Completen el siguiente enunciado y tómenlo como sugerencia para redactar su conclusión.

Si se considera a las gráficas como indicadores de cambio, la inclinación que tengan en un segmento dado proporciona información sobre la ____________ con la que se efectúa ese cambio.

Comparen sus respuestas, gráficas y conclusión con las de otros equipos y, con la coordinación de su profesor, elijan un equipo que las exponga a todo el grupo.

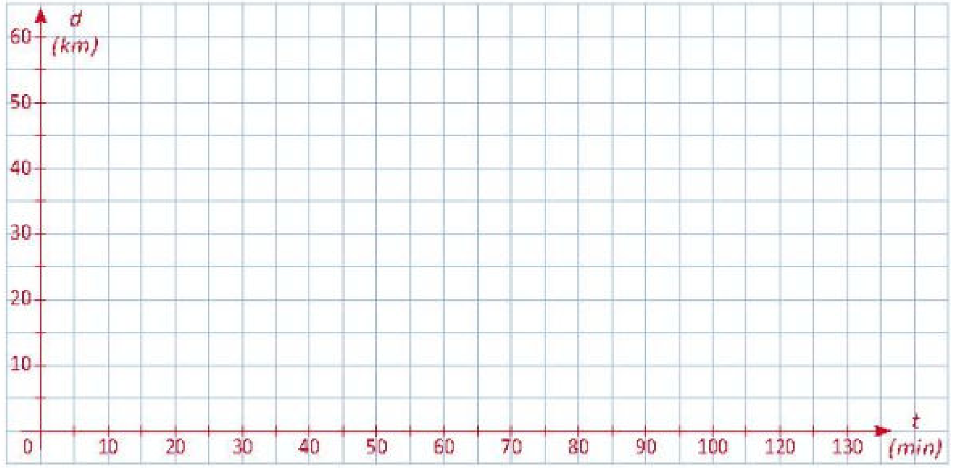
LECCIÓN 64

Gráficas rectas y curvas (2)

Las características de la gráfica y lo que revelan

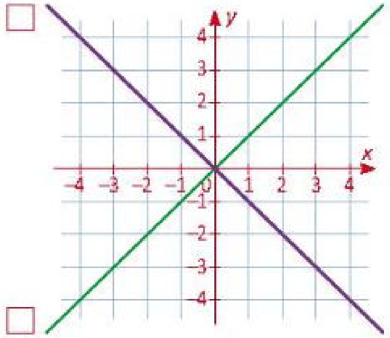
I. El *Triatlón olímpico* es una competencia deportiva en la que los participantes deben nadar 1.5 km, luego recorrer 40 km en bicicleta y finalmente correr a lo largo de 10 km. Supongan que la natación se realiza en 30 minutos, el ciclismo en 60 minutos y la carrera en 40 minutos.

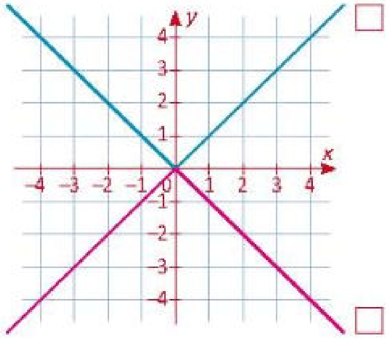
Tracen una gráfica de distancia contra tiempo que describa ese recorrido.



II. El valor absoluto de un número es igual a ese mismo número, cuando se trata de un número mayor o igual a cero, pero si el número es menor que cero, su valor absoluto se define como el inverso aditivo de ese número.

Estos planos cartesianos contienen cuatro gráficas, marquen con ✓ la que corresponde a esa función.





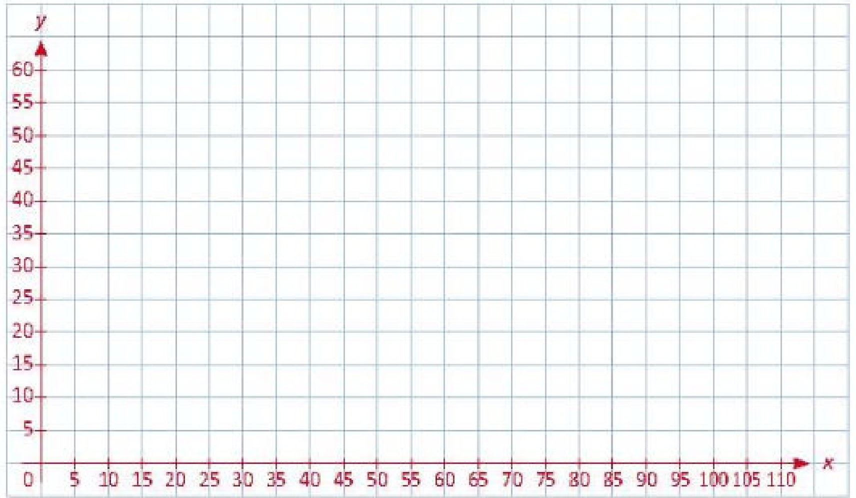
El valor absoluto de un número x se denota $|x|$ y la función $y = |x|$, de acuerdo a lo escrito arriba, se define así:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

III. En una partida de ajedrez, Diego y Ricardo hacen sus primeras 10 jugadas en 2 minutos. Para el resto de la partida, usan un reloj doble de tal forma que cada participante, después de hacer su jugada, oprime un botón que detiene la marcha de su reloj y echa a andar el de su contrario.

Tracen una gráfica que describa el comportamiento del reloj de Diego, después de las primeras diez jugadas.

Supongan que la partida termina en 40 jugadas y tracen un segmento de recta con inclinación de 45 grados para indicar que el reloj está trabajando.



IV. En México, la variación anual en el Índice Nacional de Precios al Consumidor, comúnmente llamado inflación, se muestra en la siguiente tabla para los años 2001-2010.

México										
Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Inflación	6.4	5.0	4.5	4.7	4.0	3.6	4.0	5.1	5.3	4.2

Los datos de la inflación anual en Noruega, para los mismos años, son los siguientes:

Noruega										
Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Inflación	3.0	1.3	2.5	0.5	1.5	2.3	0.7	3.8	2.2	2.4

Construyan una gráfica que muestre los datos de ambos países.

LECCIÓN 65

Eventos independientes (1)

Regla del producto

Imagina que tienes tres canicas dentro de una bolsa, dos azules y una roja. Todas son indistinguibles al tacto.

I. De la bolsa sacas una canica, anotas qué color es y NO la regresas. Sacas otra canica y anotas qué evento ocurrió.

a) Se puede hacer una relación de todas las posibilidades, por ejemplo (a, a) es el evento en que la primera canica fue azul y la segunda también. Análogamente serían los eventos (a, r), (r, a) o (r, r). ¿Son igualmente probables estos cuatro eventos? _____ Justifica tu respuesta ______________________________

____

b) ¿Alguno de estos cuatro eventos es imposible? _____ Justifica tu respuesta

____

____

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea roja? __________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea azul? __________

e) ¿Se afecta la probabilidad de que la segunda canica sea azul, si la primera fue roja? _____

f) ¿Se afecta la probabilidad de que la segunda canica sea azul, si la primera fue azul? _____

g) El evento, "La segunda canica es azul", ¿se ve afectado por lo que haya pasado en la primera extracción? _____ Justifica tu respuesta __________________

____

II. Cuando no se devuelve el elemento observado, se dice que se trata de una selección SIN reemplazo, como en la actividad anterior. En este caso de selección sin reemplazo:

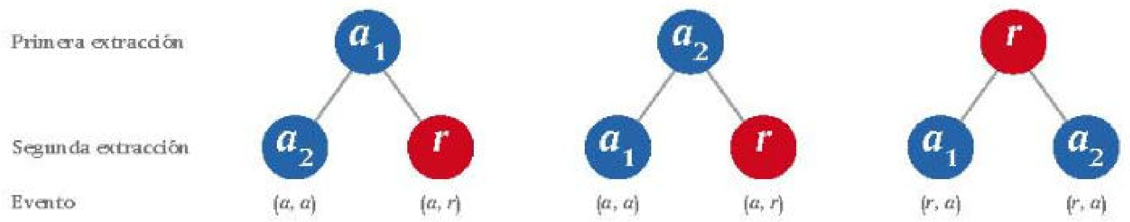
a) ¿Se afecta la probabilidad de que la segunda canica sea roja, si la primera fue roja? _____

b) ¿Se afecta la probabilidad de que la segunda canica sea roja, si la primera fue azul? _____

c) El evento, "La segunda canica es roja", ¿se ve afectado por lo que haya pasado en la primera extracción? _____ Justifica tu respuesta __________________

____

A las dos canicas azules podemos llamarlas a_1 y a_2. Los siguientes diagramas describen ambas extracciones (una situación por cada evento elemental) y el evento observado correspondiente.



III. En estos diagramas vemos que hay seis eventos elementales.

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento (a, a)? _____

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento (a, r)? _____

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (r, a)? _____

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (r, r)? _____

IV. En esta situación sin reemplazo, a Ricardo le preguntaron, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea roja? Él razonó así:

a) Como tengo dos casos posibles, uno asociado a cada evento: "que la primera canica sea azul" y "que la primera canica sea roja" y éstos son excluyentes, en cada caso puedo calcular la probabilidad de que la segunda sea roja y después habré de sumarlas.

¿Es correcto su razonamiento? _____ Porque sí son eventos __________

y para éstos es válida la regla de la ______________

b) En el primer caso, quedarán una roja y una azul. La probabilidad de que la segunda sea azul es _____; y la probabilidad de que sea roja es _____

c) Pero la probabilidad final debe estar afectada proporcionalmente por lo que ocurrió primero, así que la probabilidad de sacar primero una canica azul y después una roja es el producto de las probabilidades que calculé

_____ × _____ = _____

d) Una vez calculada la probabilidad del primero de los dos eventos excluyentes, calculó la del segundo, usando un razonamiento idéntico: Cuando saque una canica roja, quedarán dos azules. La probabilidad de que la segunda sea roja es

_____

e) Por último, sólo falta sumar las probabilidades de los dos eventos excluyentes y se obtiene

_____ + _____ = _____

f) ¿Esta probabilidad se corresponde con la del inciso **b)** de la actividad anterior?

_____ Examinen las diferencias de ambos razonamientos y concluyan.

V. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros compañeros. Si hay diferencias, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

Eventos independientes (2)

Regla del producto

I. Supongamos que tienes tres canicas dentro de una bolsa, dos azules y una roja. Metes la mano y sacas una canica, anotas qué color fue y la devuelves a la bolsa. Vuelves a meter la mano y sacas otra canica y anotas qué evento ocurrió.

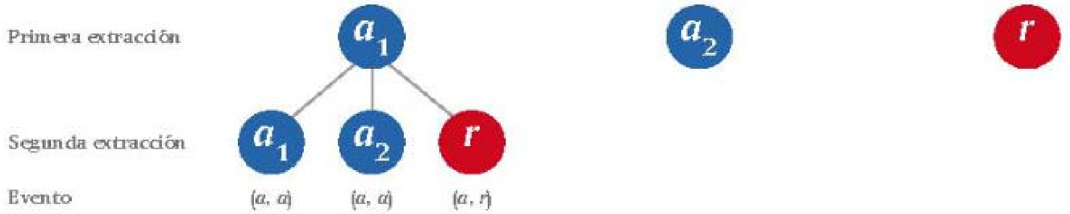
a) Podemos hacer una relación de todas las posibilidades, por ejemplo el evento (a, a) significa que en la primera extracción se tuvo una canica azul y en la segunda también. Análogamente tendrías los eventos (a, r), (r, a) o (r, r). ¿Son igualmente probables estos cuatro eventos? ______

b) Justifica tu respuesta ______________________________

____

II. Cuando se devuelve el elemento observado, se dice que se trata de una selección CON reemplazo. Veamos esta situación.

a) Completen el diagrama que indica la situación de ambas extracciones (un evento elemental por cada situación), y el evento observado que corresponde.



b) ¿Cuántos eventos elementales hay? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (a, a)? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (a, r)? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento (r, a)? ______

f) ¿Cuál es la probabilidad del evento (r, r)? ______

g) ¿Coinciden estas probabilidades con las que se obtuvieron sin reemplazo en la lección anterior? ______

h) Al extraer la primera canica, la probabilidad de que ésta sea azul es ______. Sabiendo que es remplazada, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer la segunda canica ésta sea azul? ______. ¿El producto de estas dos probabilidades se corresponde con la probabilidad del evento (a, a)? ______

i) Veamos ahora lo correspondiente al evento (r, a), al extraer la primera canica, la probabilidad de que ésta sea roja es ______. Sabiendo que es remplazada, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer la segunda canica ésta sea azul? ______. ¿El producto de estas dos probabilidades se corresponde con la probabilidad del evento (r, a)? ______

III. Hemos visto cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes. A esto se le llama **regla del producto**, la cual podemos enunciar como sigue:

a) Cuando dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurra el evento A, simultáneo con el evento B, es igual al ______________ de las probabilidades de los eventos A y B.

b) Podemos concluir que dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no tiene efecto sobre la ocurrencia del otro. Obviamente, dos eventos que son excluyentes no son eventos ______________

IV. Lanzamos una moneda tres veces, viendo qué cara muestra hacia arriba cada vez.

a) Una vez lanzada, ¿cuál es la probabilidad de que salga *águila*? ______

b) Lo que salga en cada uno de los lanzamientos, ¿dependerá de lo que haya salido en los otros? ________, porque son eventos ______________

c) Al lanzarla tres veces, habrá ________ posibles resultados: (A, A, A), (A, A, S), (A, S, A), ______________________________

d) Al observar los eventos elementales del inciso anterior, podemos ver que si la lanzamos tres veces, la probabilidad de que las tres veces caiga *águila* es ______

e) ¿Cuál es el producto de las probabilidades de cada uno de los tres lanzamientos? _____ × _____ × _____ = _____ ¿Este valor coincide con lo que obtuvieron en el inciso **d)**? __________ ¿Por qué razón?

____

f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el evento (A, S, S)? Calcúlenlo mediante la regla del producto. ________

g) Hagan lo mismo del inciso anterior para calcular las probabilidades de (S, A, S) _____ y de (S, S, A) _____ ¿Los tres eventos donde solamente sale un *águila* son mutuamente excluyentes o puede ocurrir uno y otro simultáneamente?

____

h) Usen los resultados que obtuvieron en los dos incisos anteriores para calcular la probabilidad de que salga solamente un *águila* ________

i) Calculen la probabilidad de que salga solamente un *sol* ________. ¿Este evento y el evento "sale sólo un *águila*" son excluyentes? ________

j) Usen los dos resultados que obtuvieron en los dos incisos anteriores para calcular la probabilidad de que las tres veces no salga lo mismo, es decir, no salgan sólo *soles* o sólo *águilas*. ________

k) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan únicamente *águilas*? ________. ¿Cuál es la de que salgan únicamente *soles*? ________. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres veces salga lo mismo? ______

l) A partir del resultado del inciso **k)** podemos llegar al resultado del inciso **j)**, puesto que los eventos son ______________ y sus probabilidades deben sumar ________

Eventos independientes (3)

Regla del producto y variaciones con el complemento y la regla de la suma

I. Pablo, Miguel y Enrique formaron un trío musical. Ellos se reúnen para tocar solamente si es en un día de la semana en el que alguno haya nacido. Supongamos que las fechas de su nacimiento sean aleatorias, y que el día de la semana en el que nació uno cualquiera de ellos no dependió del día en que nació alguno de los otros dos.

a) Supongamos que al lunes le asignamos el 1, al martes el 2, y así sucesivamente hasta el 7, que estará representando al domingo. Además, formamos una terna de números con el primero asociado al día de la semana en que nació Pablo, el segundo al día en que nació Miguel y el tercero al que nació Enrique. Por ejemplo, la terna (1, 6, 2) equivale a decir que Pablo nació en lunes, Miguel en sábado y Enrique en martes, y la terna (1, 2, 6) es diferente porque aquí se dice que Miguel nació en martes y Enrique en sábado. ¿Cuántas ternas diferentes de días de la semana podemos asociar con ellos? ______ Esta cantidad representa al total de eventos ____________ y, en este caso todos tienen la misma ______ de ocurrir.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos hayan nacido el domingo? ____________ Sólo hay una terna del total de ternas posibles. ¿Se corresponde esta probabilidad con la calculada si utilizamos la regla del producto? ____________

c) Si en el inciso anterior cambiamos la palabra *domingo* por *lunes*, ¿cambiaría el resultado de la probabilidad? ______. Justifiquen su respuesta. ____________

____

d) Los eventos "los tres nacieron en domingo" y "los tres nacieron en lunes", ¿son eventos excluyentes? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad de que todos hayan nacido el mismo día? ____________

II. Continuamos con el trío musical que forman Pablo, Miguel y Enrique.

a) ¿Cual es la probabilidad de que dos de ellos hayan nacido en domingo y el tercero en otro día de la semana? Observa que hay tres casos en esta situación, uno para cada persona, considerando que ésta nació en distinto día que los otros dos, además de las seis posibilidades del día en que pudo haber nacido.

____

b) Si en el inciso anterior cambiamos la palabra *domingo* por *lunes*, ¿cambiaría el resultado de la probabilidad? ____________. Justifiquen su respuesta.

____

c) Los eventos "dos de ellos nacieron en domingo y el tercero en otro día de la semana" y "dos de ellos nacieron en lunes y el tercero en otro día de la semana" son eventos excluyentes? ____________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que dos hayan nacido el mismo día de la semana y el tercero en otro día distinto? ____________

III. Hagamos uso de las probabilidades de lo eventos ya calculados con el trío de Pablo, Miguel y Enrique.

a) El evento "Al menos dos nacieron el mismo día de la semana" incluye a los eventos excluyentes "Los tres nacieron el mismo día" y "Dos nacieron el mismo día de la semana y el tercero en otro día distinto", ya calculados en las actividades **I** y **II**, por lo tanto, la probabilidad de que "Al menos dos nacieron el mismo día de la semana" es ____________

b) El evento "Los tres nacieron en diferente día de la semana" es el complemento del evento que calculamos en el inciso anterior, por lo tanto su probabilidad es

____

IV. En ocasiones, basta contar cuidadosamente los eventos a favor de un evento particular o los del evento complementario a éste.

a) Para contestar "¿cuál es la probabilidad de que cuatro personas hayan nacido en diferente día de la semana?", primero contaremos todas las posibilidades que tendría la cuarteta, cada una tiene 7 posibilidades y entre las cuatro las posibilidades serán $7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ____________, pero si queremos que todas hayan nacido en un día diferente, vemos que la primera persona tiene 7 posibilidades; pero la segunda tiene sólo 6, pues debe ser un día diferente del que nació la primera; similarmente, la tercera persona sólo tiene 5 posibilidades y la última tiene 4. Así, para que todos hayan nacido en un día distinto de la semana se tienen $7 \times 6 \times 5 \times 4 =$ ____________ posibilidades, por tanto, la probabilidad de que cuatro personas hayan nacido en diferente día de la semana es ____________

b) Para contestar "¿Cuál es la probabilidad de que, de cuatro personas, al menos dos hayan nacido el mismo día de la semana?", podemos ver que este es el evento complementario de ______________________________

____

Por lo tanto, la probabilidad pedida es 1 – ____________ = ____________

V. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros compañeros. Si hay diferencias, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

Evaluación tipo Enlace

1. Un cuadrado se transforma en rectángulo reduciendo dos de sus lados paralelos en 5 cm y extendiendo los otros en 6 cm. El área del rectángulo resultante es de 102 cm². Encontrar la medida del lado del cuadrado original.

a) 9 m **b)** 10 m **c)** 11 m **d)** 12 m

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 24 = 0$ son

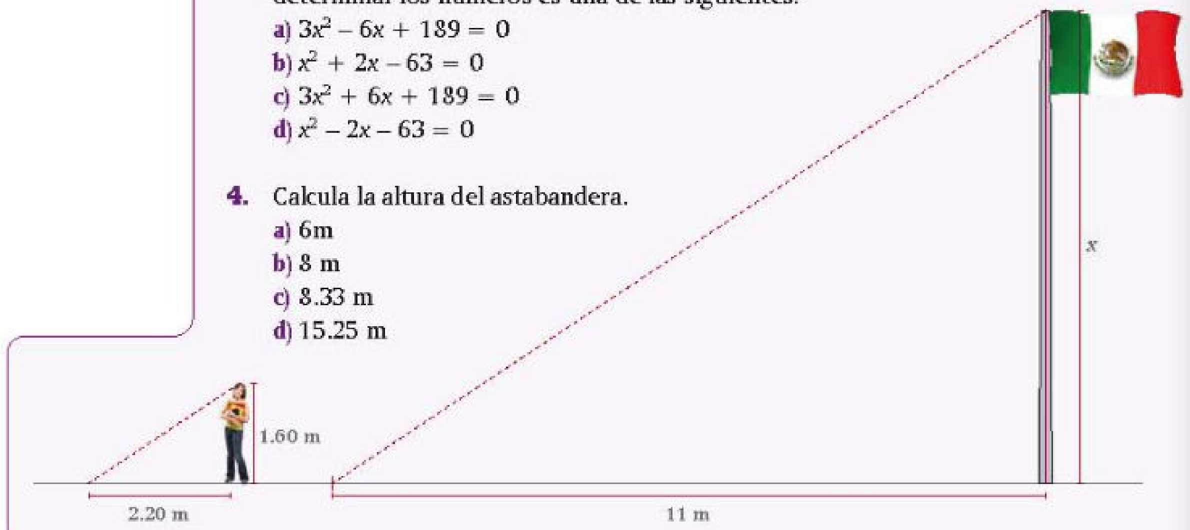
a) –2 y 12 **b)** 4 y –6
c) –12 y 2 **d)** 6 y –4

3. Si x es el primero de tres números enteros consecutivos y cada uno se eleva al cuadrado, la suma de los cuadrados es igual a 194. La ecuación necesaria para determinar los números es una de las siguientes:

a) $3x^2 - 6x + 189 = 0$
b) $x^2 + 2x - 63 = 0$
c) $3x^2 + 6x + 189 = 0$
d) $x^2 - 2x - 63 = 0$

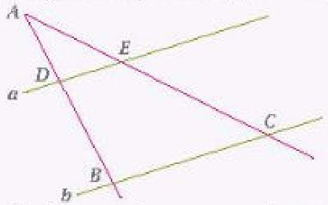
4. Calcula la altura del astabandera.

a) 6m
b) 8 m
c) 8.33 m
d) 15.25 m



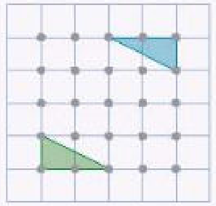
5. En la siguiente figura, las rectas a y b son paralelas, $AB = 20$, $AD = 8$, $AC = 28$. Calcula la medida de AE.

a) 11.2
b) 12
c) 13.6
d) 14



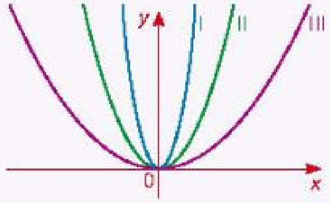
6. En la siguiente figura, la razón de homotecia es:

a) –2
b) –1
c) 1
d) 2

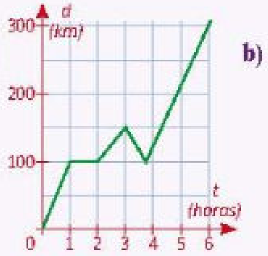


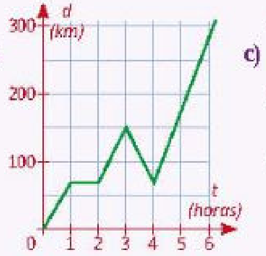
7. En el sistema de coordenadas, las gráficas I, II y III representan a $y = x^2$, $y = 2x^2$ y $y = \frac{x^2}{2}$, aunque no necesariamente en ese orden. El orden correcto es:

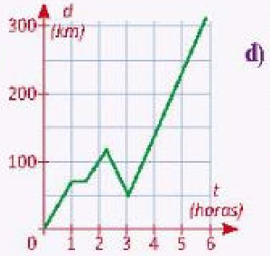
a) II, III y I
b) I, III y II
c) III, II y I
d) II, I y III.

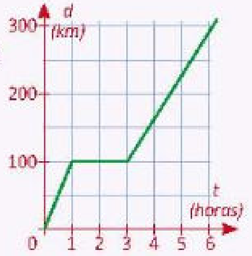


8. Ramón tomó su automóvil y partió del DF rumbo a Morelia, que queda a 309 km de distancia. Se detuvo una hora en Toluca, que dista 70 km del DF, para desayunar y reanudó su viaje. Sin embargo, una hora después de que salió de Toluca, se percató de que había olvidado su teléfono en el lugar donde desayunó, así que tuvo que regresar por él. Afortunadamente le habían guardado su teléfono, lo tomó, dio las gracias y continuó su viaje. En el eje vertical del sistema de coordenadas se señala la distancia que hay al DF, y en el eje horizontal el tiempo transcurrido desde que Ramón salió del DF. ¿Cuál de las gráficas representa mejor el viaje de Ramón?

a)


b)


c)


d)


9. La regla del producto de las probabilidades se puede aplicar:

a) con cualquier par de eventos
b) sólo si son eventos complementarios
c) sólo si son eventos independientes
d) sólo si son eventos excluyentes

10. Javier tiene diez cartas numeradas cada una con uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si saca dos cartas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos dígitos sean pares? (Sí, el 0 es par.)

a) $\frac{2}{10}$ **b)** $\frac{2}{9}$
c) $\frac{5}{10}$ **d)** $\frac{5}{9}$

Evaluación tipo PISA

Porterías para la cancha de futbol

Juan y sus amigos cursan el tercer grado de secundaria y han decidido construir porterías para su cancha de futbol. Investigaron que en las porterías profesionales el travesaño mide 24 pies (7.32 m) y los postes 8 pies (2.44 m). Usarán tubos de PVC para construirlas. Éstos se venden en dos modalidades: 6 m y 2 m de longitud, cuyo costo es de $90 y $35 respectivamente. Por supuesto, pueden pedir que se los corten al tamaño que deseen.

Como aún están creciendo, no quieren una portería tan alta; por ello acordaron que los postes tengan 2 m de longitud. Para instalar la red, requieren además colocar en la parte superior de cada poste un tubo de soporte horizontal de 1 m y un tramo transversal cuyo apoyo esté a 2.5 m de la base del poste, como se muestra en la figura 1.

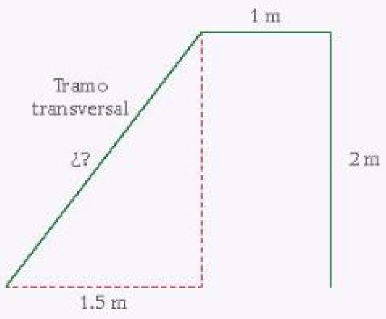


Figura 1

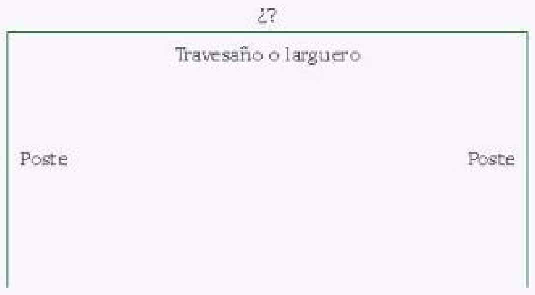


Figura 2

1. ¿Cuál debe ser la longitud del travesaño para que su portería guarde en el frente, la misma proporción que la profesional?__________. ¿Cuánto debe medir el tramo transversal para la red?__________

2. Antes de ir por los tubos de PVC desean explorar cuál es la opción más conveniente de compra y corte del material. Ayúdalos a organizar la información en la siguiente tabla. En cada renglón, si es el caso, escribe las diversas opciones y analízalas. No olvides examinar si algún sobrante sirve para otra pieza.

Tipo de pieza	Número de piezas	Medida de cada pieza	Cantidad de tubos de PVC		Material sobrante
			6 m	2 m	
Travesaño					
Poste	4	2 m			
Tubo soporte		1 m			
Tramo transversal					
Total					

3. ¿Cuánto dinero necesitan para las dos porterías en la opción que eligieron?

____

4. Como el balón que ellos tienen mide 20 cm de diámetro, pensaron calcular cuántos espacios para meter gol contiene cada portería. Para ello, imaginaron que la circunferencia mayor del balón cabe en un cuadrado de 20 cm de lado y luego estimaron la cantidad de estos cuadrados en el frente de la portería, pero obtuvieron diferentes resultados. ¿Cuál de ellos tiene razón? __________ Justifica tu respuesta. ____________________

a) Cálculo de Juan: $20 \times 60 = 1,200$ cuadrados

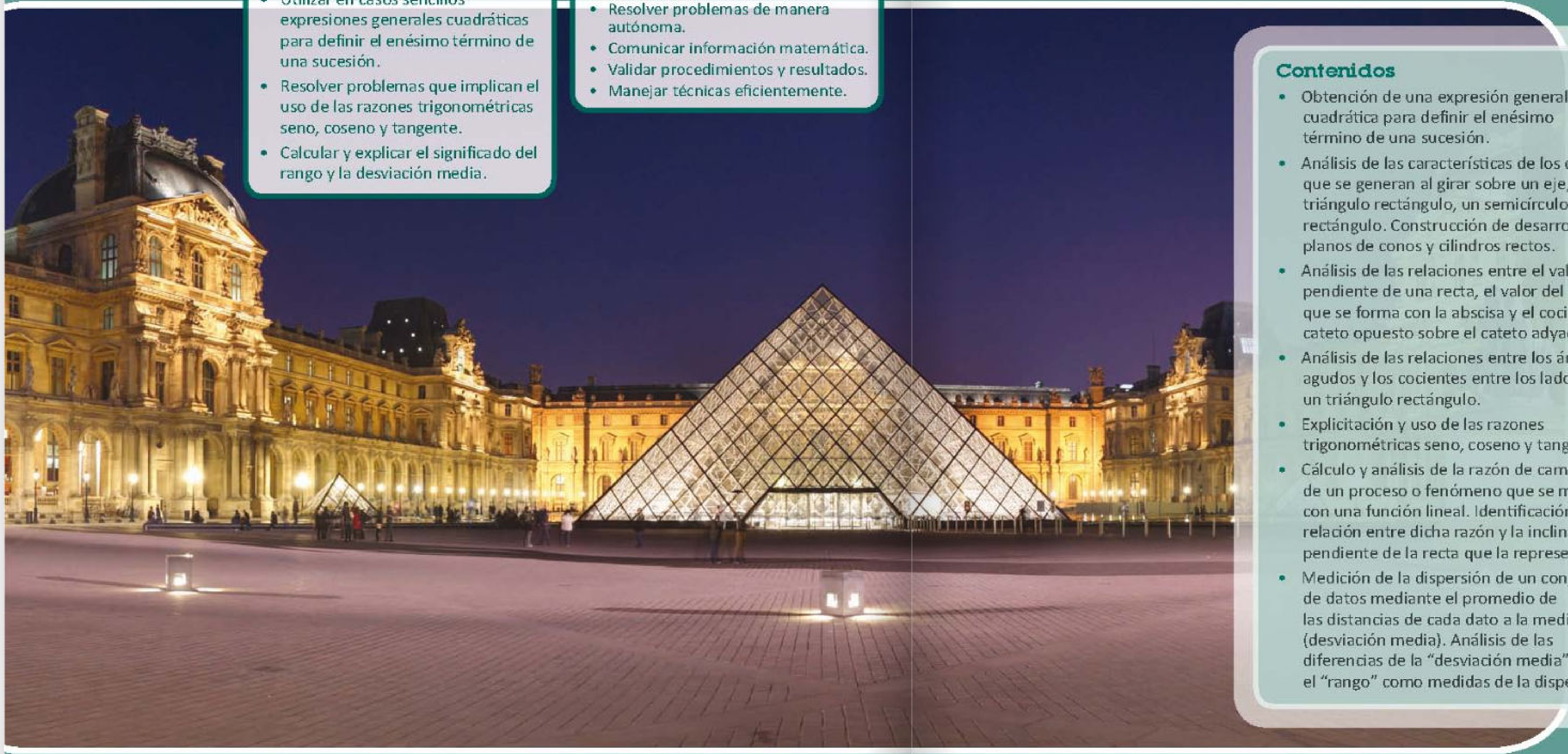
b) Cálculo de Ramón: $10 \times 30 = 300$ cuadrados

c) Cálculo de Toño: $10 \times 60 = 600$ cuadrados

d) Cálculo de Sergio: $20 \times 30 = 600$ cuadrados

Por su contenido y extensión, el museo de Louvre, en París, es uno de los más importantes del mundo. Construido en el siglo XII, fue sucesivamente castillo, palacio y residencia real. A fines del siglo XVII, el palacio fue sede de la Academia Real de Ciencias, establecida ahí en 1666. Como resultado de la Revolución Francesa, las colecciones de arte de la nobleza se concentraron en el palacio de Louvre, una parte del cual se abrió al público como museo el 8 de noviembre de 1793. En 1795 el Louvre volvió a ser sede de la Academia de Ciencias físicas y matemáticas. La pirámide de cristal, inaugurada en 1989, le da un contraste geométrico modernista.

BLOQUE IV



Aprendizajes esperados:

- Utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Contenidos

- Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.
- Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.
- Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.
- Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
- Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

LECCIÓN 68

Sucesiones, términos y patrones

La búsqueda imaginativa de una regularidad

Encontrar los números o figuras que continúan una sucesión dada es un ejercicio mental atractivo y hasta divertido. Más allá de lo anterior, el hecho de poder determinar cualquier término de una sucesión requiere de un poco de álgebra, algunas técnicas sencillas y mucha práctica. En este grupo de lecciones trataremos este tema con algunos ejemplos y ejercicios.

I. Dados los primeros cinco términos de una sucesión como
2, 7, 12,17, 22, …

Es muy fácil encontrar unos cuantos de los que siguen, pero si uno se pregunta qué número va en la posición 57, o en la 218 de la sucesión, es necesario disponer de una fórmula que nos permita calcularlo rápidamente. En este caso, la fórmula buscada es una de las siguientes expresiones algebraicas. Márcala con ✓:

a) $n + 5$ b) $3n - 1$ c) $5n - 3$

donde n es la posición o el lugar del número en la sucesión.

II. Una buena manera de ejercitarse en el desarrollo de la habilidad para descubrir o determinar la regla, patrón o fórmula que satisfacen los términos de una sucesión es invertir el proceso. Es decir, inventar o generar la regla o fórmula general y a partir de ella, escribir los términos. Por ejemplo, supongamos que un integrante del equipo plantea la fórmula $n^2 + 7$ y pide a los demás que escriban los primeros cinco términos. La manera más ilustrativa de hacerlo es con una tabla como la siguiente:

n	$n^2 + 7$
1	8
2	11
3	16
4	23
5	32

Lo cual es muy fácil. Ahora, si se pide determinar el término que ocupa el lugar 84 en la sucesión, también es fácil contestar que $(84)^2 + 7$ y si se dispone de una calculadora, hacerlo: ______.

Sin embargo, cuando no se conoce la fórmula, sino únicamente los primeros términos, no tiene sentido tratar de adivinar la regla que otra persona diseñó para generarlos, así que es necesario analizar los términos en busca de algún patrón o regularidad.

III. Revisen la sucesión de la actividad **I** y completen la siguiente tabla.

a) Debajo de n escriban la regla de la sucesión y debajo de cada valor de n, anoten el valor correspondiente a cada término.

b) En ❶, bajo los términos de la sucesión, escriban la diferencia que existe entre cada par consecutivo de ellos.

n	1	2	3	4	5

❶

c) Ahora, en la tabla que sigue, repitan la sucesión de la actividad **II** y escriban en ❷ la diferencia que existe entre cada par consecutivo de sus términos.

d) Escriban en ❸ la diferencia que existe entre cada par de números de ❷.

n	1	2	3	4	5
$n^2 + 7$					

❷

❸

e) ¿Qué cambio hubo en las diferencias de la segunda sucesión respecto de las de la primera? ______________________________

Para precisar el lenguaje, a las diferencias de ❶ y ❷ se les llama **primeras diferencias** y a las de ❸, **segundas diferencias**.

IV. Para terminar, hagan una síntesis de lo visto en esta lección.

a) Completen las siguientes frases y comenten en grupo sus respuestas.

En la primera sucesión, las diferencias son ______________.

En la segunda sucesión, las primeras diferencias no son ______________,

pero las segundas diferencias sí son ______________.

b) Finalmente, comparen las expresiones algebraicas de ambas sucesiones y con el apoyo de su profesor, expliquen en qué difieren. Una vez aclaradas todas las dudas que hayan surgido, completen las siguientes conclusiones.

Una sucesión cuyas primeras diferencias sean ______________ se describe con una expresión algebraica ______________.
Una sucesión cuyas ______________ diferencias sean iguales se describe con una expresión algebraica ______________________.

Sucesiones y diferencias

La fórmula general de una sucesión cuadrática

Continuamos con la práctica de:

- A partir de la fórmula general de una sucesión, sustituir la variable n con los valores 1 a 5 para determinar los cinco primeros términos de dicha sucesión.
- A partir de los primeros cinco términos de una sucesión, encontrar la regla o fórmula general que permita calcular cualquier término de la misma.

I. ¿Es posible que una sucesión inicie con números negativos?

a) Escribe los primeros cinco términos de la sucesión cuya fórmula general es $2n^2 - 9$.

b) Calcula las primeras diferencias entre los términos de la sucesión.

c) Calcula las segundas diferencias.

n	1	2	3	4	5
$2n^2 - 9$					

Primeras diferencias				

Segundas diferencias			

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y analicen y eliminen las discrepancias que encuentren.

II. Escriban los primeros cinco términos de la sucesión $3n^2 + 5$

a) Calculen las primeras diferencias.

b) Calculen las segundas diferencias.

n	1	2	3	4	5
$3n^2 + 5$					

En todas las actividades en que se pide escribir los términos de una sucesión a partir de su fórmula general, pueden hacerlo en su cuaderno y, de considerarlo necesario, intercalar a la tabla una fila más, como la amarilla de abajo, para hacer la sustitución de n por su valor correspondiente en cada término. Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5
$3n^2 + 5$	$3(1)^2 + 5$	$3(2)^2 + 5$	$3(3)^2 + 5$	$3(4)^2 + 5$	$3(5)^2 + 5$
$3n^2 + 5$	8	17			80

III. Modifiquemos ahora la expresión algebraica que genera la sucesión, por ejemplo, agregando $5n$. Escriban los primeros cinco términos de $4n^2 + 5n - 2$.

a) Calculen las primeras diferencias.

b) Calculen las segundas diferencias.

n	1	2	3	4	5
$4n^2 + 5n - 2$					

Recuerden que si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales, pero las segundas sí lo son, entonces su fórmula es una expresión de segundo grado. La forma general de esta expresión de segundo grado es entonces

$$an^2 + bn + c$$

c) Completen la siguiente tabla, con los valores de a, b y c que corresponden a las sucesiones vistas en esta lección.

Fórmula de la sucesión	Valor de a	Valor de b	Valor de c
$2n^2 - 9$	2		
$3n^2 + 5$		0	
$4n^2 + 5n - 2$			-2

IV. Ahora completen la tabla con los primeros cinco términos de la sucesión cuya fórmula es precisamente la fórmula general: $an^2 + bn + c$

a) Calculen tanto las primeras diferencias como las segundas.

n	1	2	3	4	5
$an^2 + bn + c$	$a(1)^2 + b(1) + c$		$a(3)^2 + b(3) + c$	$a(4)^2 + b(4) + c$	
$an^2 + bn + c$	$a + b + c$		$9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$	

		$7a + b$	

		$2a$

Como era de esperarse, las segundas diferencias son iguales, ya que la fórmula de la sucesión es una expresión algebraica de segundo grado o cuadrática.

Comparen sus respuestas de toda la lección, especialmente las de esta última actividad, con todo el grupo y, con la ayuda de su profesor, aclaren dudas y eliminen discrepancias, si las hay.

LECCIÓN 70

Sucesiones de figuras y números con fórmula cuadrática

Aplicación de la fórmula general

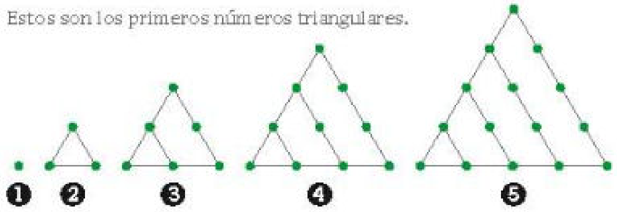
Con base en sucesiones de figuras y números, cuya fórmula general sea una expresión algebraica lineal o cuadrática, podemos trazar varias figuras y calcular varios términos.

I. Hace algunos siglos, en Grecia, uno de los temas que Pitágoras estudiaba era el de los llamados números figurativos, representados por puntos en figuras o arreglos triangulares, cuadrados, pentagonales, etcétera.

a) ¿Cuál es el sexto número triangular? Agreguen la figura correspondiente.

b) Obtengan las primeras diferencias de la sucesión de números triangulares: ____________________

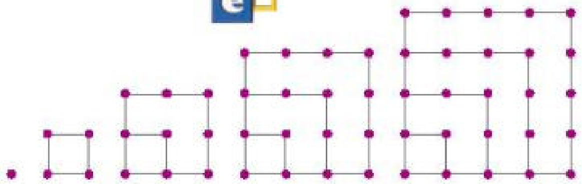
Estos son los primeros números triangulares.



c) Obtengan las segundas diferencias: ____________________

d) Expresión algebraica de la regla de la sucesión: ____________________

II. Enseguida se muestran las figuras asociadas a los números cuadrados:



a) Primeras diferencias de la sucesión de números cuadrados: ____________________

b) Segundas diferencias: ____________________

c) Expresión algebraica de la regla de la sucesión: ____________________

III. De acuerdo a la siguiente sucesión de figuras, completen la tabla con el número de puntos que corresponde a cada una y anoten las diferencias.

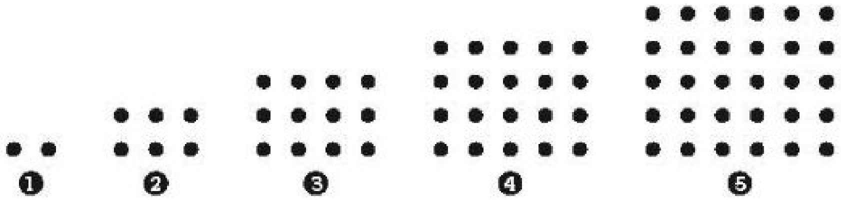


Figura	No. de puntos
1	
2	
3	
4	
5	

a) Primeras diferencias de la sucesión: ____________________

b) Segundas diferencias: ____________________

c) Expresión algebraica de la regla de la sucesión: ____________________

IV. Para determinar la regla de una sucesión que tenga segundas diferencias constantes, usamos la expresión algebraica cuadrática que genera una sucesión de ese tipo, es decir, la de la actividad **IV** en la lección anterior, y la combinamos con la sucesión cuya regla buscamos establecer. Por ejemplo, supongamos que tenemos la sucesión 6, 24, 52, 90, 138, …

n	$an^2 + bn + c$	Primeras diferencias	Segundas diferencias
1	$a + b + c$		
		$3a + b$	
2	$4a + 2b + c$		$2a$
		$5a + b$	
3	$9a + 3b + c$		$2a$
		$7a + b$	
4	$16a + 4b + c$		$2a$
		$9a + b$	
5	$25a + 5b + c$		

n	?	Primeras diferencias	Segundas diferencias
1	6		
		18	
2	24		10
		28	
3	52		10
		38	
4	90		10
		48	
5	138		

Al comparar las segundas diferencias de ambas sucesiones, tenemos que

$$2a = 10$$

de donde,

$$a = 5$$

Al tomar la diferencia inicial de las primeras diferencias tenemos que:

$$3a + b = 18$$

En la que sustituimos el valor de a:

$$3(5) + b = 18$$
$$15 + b = 18$$
$$b = 3$$

Finalmente,

$$a + b + c = 6$$

en donde sustituimos a y b para tener

$$5 + 3 + c = 6$$

Por lo tanto $c = -2$

Así que, al sustituir a, b y c en la fórmula general, tenemos que la sucesión

$$6, 24, 52, 90, 138, \ldots$$

Tiene como regla

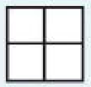
$$5n^2 + 3n - 2$$

a) Cuando la regla general de una sucesión es una expresión algebraica cuadrática, las primeras diferencias son ______________ y las segundas son ______________

b) Comprueben la regla general obtenida sustituyendo $n = 1, 2, 3, 4$ y 5

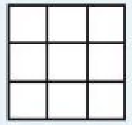
c) Apliquen este procedimiento a las sucesiones de las actividades **I** a **III** de esta lección, para verificar las respuestas que dieron antes.

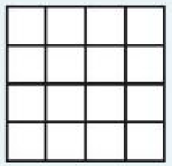
Reto



Este es un cuadrado de lado 2, en él hay en total 5 cuadrados.

Las figuras de abajo son cuadrados de lados 3 y 4. En cada caso encuentra cuántos cuadrados hay en total.





Ahora calcula cuántos cuadrados hay en un cuadrado de lado 5, sin trazarlo.

LECCIÓN 71

Sólidos de revolución

Cómo se generan los sólidos de revolución

I. Analicen y comenten en pareja las siguientes transformaciones:

- La traslación de un punto en la misma dirección genera una recta.
- La traslación de una recta en la misma dirección genera un plano.
- La traslación de un plano en la misma dirección genera un cuerpo.

El segmento *AB*, el cuadrado *ABCD* y el círculo *C* se trasladan en la dirección y distancia determinados por la flecha *f*. Tracen e indiquen qué figura o cuerpo generan.

II. Ahora analizaremos cómo se generan algunos sólidos de revolución.

Recorten en cartulina:
- Un rectángulo de lados 5 cm y 12 cm
- Un triángulo rectángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm
- Un semicírculo de 5 cm de radio

Peguen con cinta adherible cada figura a un popote y con sus manos háganlo girar.

a) ¿Qué cuerpo se genera al girar el rectángulo? ______________

b) ¿Qué cuerpo se genera al girar el triángulo rectángulo? ______________

c) ¿Qué cuerpo se genera al girar el semicírculo? ______________

d) ¿Cuáles son las medidas del cilindro que se genera?

radio de la base: ______________ altura: ______________

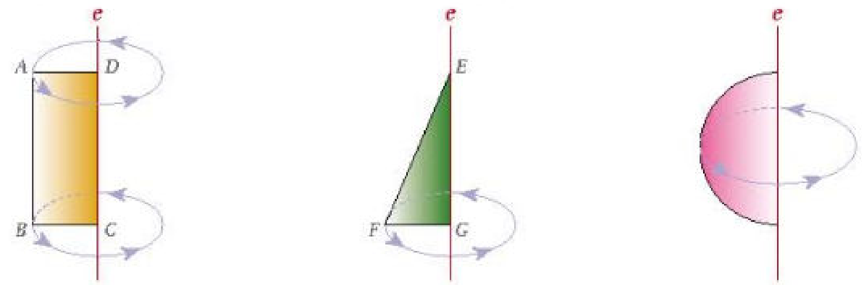
e) En el caso del cilindro, si en lugar de pegar al popote el lado de 12 cm, pegamos el lado de 5 cm, entonces:

radio de la base: ______________ altura: ______________

f) ¿Cuáles son las medidas del cono que se genera?

radio de la base: ______________ altura: ______________

III. En las siguientes figuras, a la recta *e* se le llama **eje**.



a) ¿Qué lado del rectángulo es el eje del cilindro? ______________

b) ¿Qué lado del triángulo rectángulo es el eje del cono? ______________

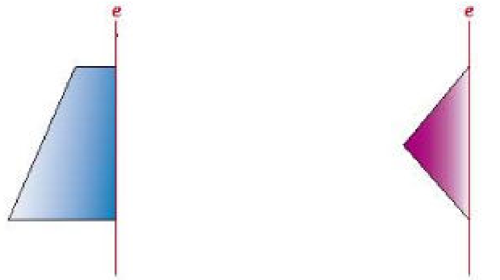
En la figura de arriba a la izquierda, al girar el rectángulo *ABCD*, el lado *AB* genera la cara lateral del cilindro. Al lado *AB* del rectángulo se le llama **generatriz** del cilindro.

c) ¿Qué lado del triángulo rectángulo genera la cara lateral del cono? ______________

d) ¿Qué lado del triángulo rectángulo es la generatriz del cono? ______________

A los cuerpos que se generan por la rotación sobre su eje de una figura plana se les llama **sólidos de revolución**. El cilindro, el cono y la esfera son sólidos de revolución.

IV. Describe qué sólido de revolución genera cada una de las siguientes figuras.



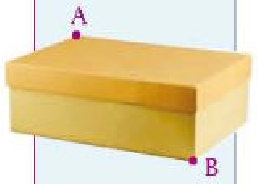
V. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con otros compañeros. Si hay diferencias analicen las causas y corrijan lo que sea necesario.

Construcción de desarrollos planos de cilindros y conos

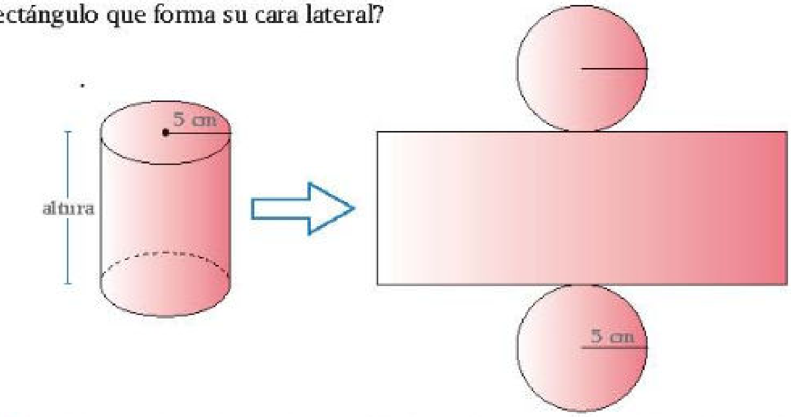
Cómo hacer desarrollos planos de cilindros y conos

Reto

Una hormiga está en la esquina A de una caja de zapatos. Traza el camino más corto que debe recorrer la hormiga para ir de A a B.



I. En el desarrollo plano de un cilindro, ¿cómo se determinan las dimensiones del rectángulo que forma su cara lateral?



a) En el desarrollo plano de un cilindro, el ancho del rectángulo es igual a ______________________

b) ¿Cómo calculan el largo del rectángulo?, es decir, ¿a qué medida corresponde este largo respecto del cilindro? ______________________

c) Si el radio de la base del cilindro mide 5 cm, ¿cuánto mide el largo del rectángulo? ______________________

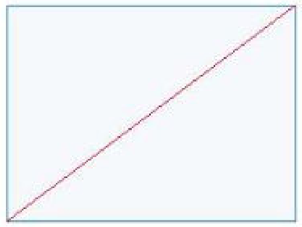
d) Comenten primero entre los miembros del equipo cómo resolvieron **b)** y **c)** luego pónganlo en común con el resto del grupo.

II. Se tiene una hoja tamaño carta (21.5 cm x 28 cm) que se va a usar como cara lateral de un cilindro de 21.5 cm de altura.

a) ¿Cuál debe ser el radio de la base del círculo? ______________

b) Cuando hayan hecho los cálculos y tengan la respuesta de la pregunta anterior, tracen en cartulina los dos círculos y comprueben que sirven como bases del cilindro.

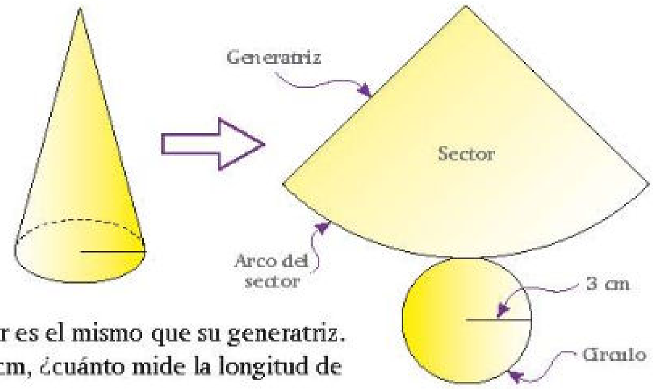
III. Antes de que armen el cilindro de la actividad **II**, consideren que en la hoja tamaño carta se trazó con color una de las diagonales del rectángulo.



Hagan un dibujo para observar cómo se verá esta línea de color cuando el cilindro esté armado. Después armen el cilindro para verificarlo.

IV. El desarrollo plano de un cono está formado por un círculo, que es su base, y por un sector circular, que es su cara lateral.

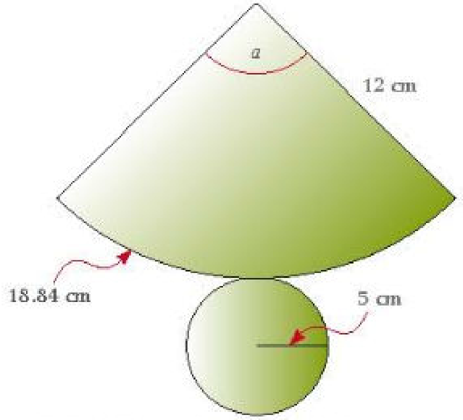
La medida de arco del sector circular es la misma que la medida de la circunferencia de la base.

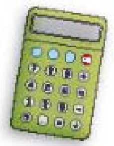


Por otra parte, el radio del sector circular es el mismo que su generatriz.

a) Si la medida del radio de la base es 3 cm, ¿cuánto mide la longitud de arco del sector? ______________

b) Si la longitud de arco del sector circular es 18.84 cm, y la generatriz que nos piden usar mide 12 cm, ¿cuál es la medida del ángulo a del sector circular?





Para calcular la medida del ángulo central del sector circular, recordemos que en el curso de matemáticas de 2o. de secundaria estudiamos cómo calcular la medida L de un arco de círculo mediante la fórmula:

$$L = \frac{a}{360} \times 2\pi r$$

a: ángulo en grados
r: radio del sector circular (generatriz)

Sustituyan los valores correspondientes en la fórmula y calculen la medida del ángulo a.

$a =$ ________

c) Con las medidas obtenidas, tracen el desarrollo plano del cono, agreguen las pestañas necesarias para pegarlo y ármenlo.

d) Comparen su cono con el de otros equipos, si hay diferencias, analicen por qué y, si es el caso, corrijan lo necesario

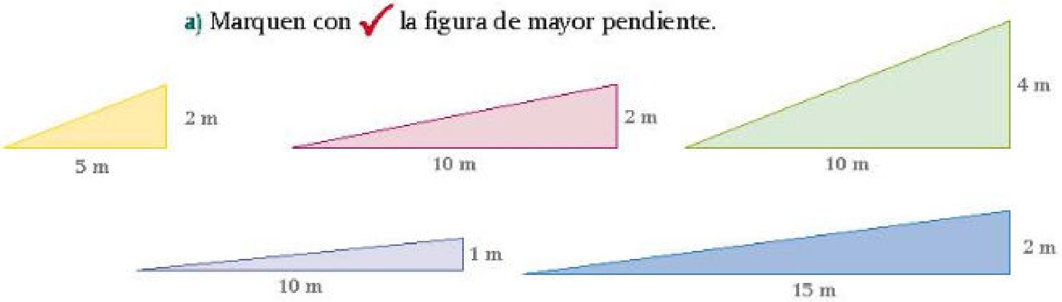
V. En una cartulina tracen y luego armen un cono, con las siguientes medidas:
Radio de la base: 4 cm
Ángulo central: 80°
(Recuerden que en la fórmula $L = \frac{a}{360} \times 2\pi r$, el valor de r es la medida del lado del ángulo central, y que también es la generatriz del cono).

Pendiente de una recta (1)

Componentes de la pendiente de una recta

I. La inclinación o pendiente de una carretera tiene dos componentes: el cambio horizontal y el cambio vertical.

a) Marquen con ✓ la figura de mayor pendiente.



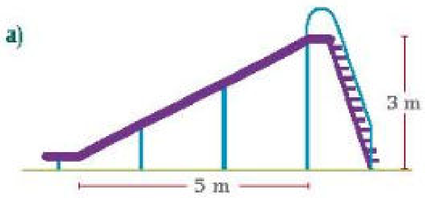
b) Si se divide la componente vertical entre la horizontal, ¿qué relación hay entre este cociente y la pendiente? ______________________

c) ¿Qué pasa con el valor del cociente cuando aumenta el cambio vertical y permanece constante el cambio horizontal? ______________________

d) ¿Qué pasa si aumenta el cambio horizontal y el cambio vertical permanece constante? ______________. El cociente mencionado es la pendiente.

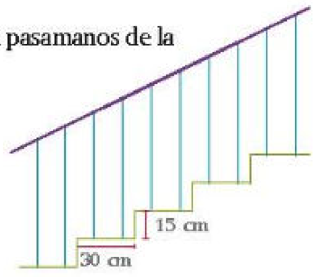
II. Calculen el valor de la pendiente de la resbaladilla y del pasamanos de la escalera.

a)



Pendiente: ______

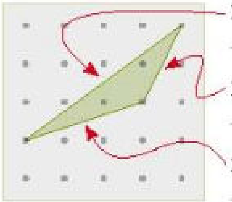
b)



Pendiente: ______

III. Anoten el valor de la pendiente de cada lado de los triángulos.

a)

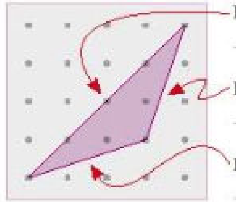


Pendiente: ______

Pendiente: ______

Pendiente: ______

b)



Pendiente: ______

Pendiente: ______

Pendiente: ______

IV. En las rampas de una pista de bicicletas hay pendientes diferentes, según se muestra en la tabla de la derecha.

Rampa	Longitud (m)	Altura (m)
A	24	18
B	12	8
C	9	12
D	12	16

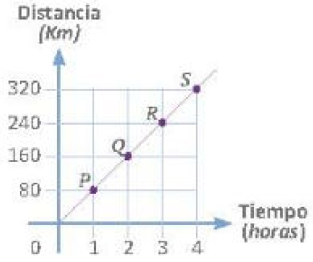
a) La rampa que tiene mayor pendiente es: ______________

b) La rampa que tiene menor pendiente es: ______________

c) ¿Qué hicieron para encontrar las respuestas anteriores? ______________________

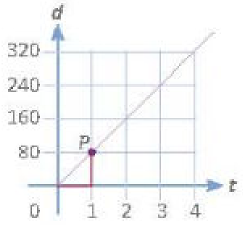
V. La tabla y la gráfica siguientes muestran la relación entre el tiempo y la distancia que recorre un automóvil que viaja a una velocidad media de 80 kilómetros por hora.

Tiempo t (horas)	Distancia d (km)
1	80
2	160
3	240
4	320

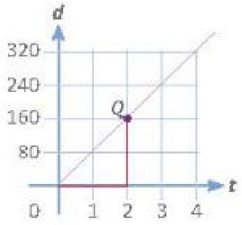


En los siguientes sistemas de coordenadas se repite la gráfica anterior, marcando los componentes para calcular la pendiente de la recta en cada uno de los puntos P, Q, R y S.

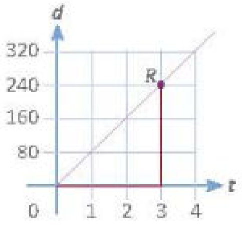
a) Anoten el valor de la pendiente de la recta en cada uno de esos puntos y, si es necesario, simplifiquen la expresión.



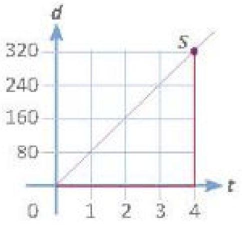
Pendiente: ______



Pendiente: ______



Pendiente: ______



Pendiente: ______

b) ¿Cómo es el valor de la pendiente de la recta en cada uno de los puntos P, Q, R y S? ______________________

c) ¿Qué conclusión obtienen de esta actividad? ______________________

VI. Comparen sus respuestas de esta lección con las del resto del grupo. Si hay diferencias analicen el porqué y apoyados por su maestro obtengan conclusiones comunes.

Pendiente de una recta (2)

Determinación del valor de la pendiente a partir de una tabla o una gráfica

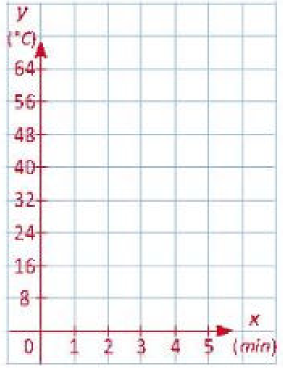
I. Al calentar agua para preparar café, su temperatura aumenta 8 °C cada minuto.

Consideren dos posibles situaciones:

❶ Que la temperatura inicial del agua sea 0 °C.

❷ Que la temperatura inicial del agua sea 16 °C.

a) Construyan la tabla y la gráfica correspondientes a cada situación durante los primeros 5 minutos (ambas gráficas en el mismo sistema de coordenadas y cada una de diferente color). Designen con y a la temperatura del agua y con x al tiempo de calentamiento.



Situación ❶	
x (min)	y (°C)

Situación ❷	
x (min)	y (°C)

b) ¿Qué expresión algebraica relaciona y con x en la situación ❶? ______

c) ¿Qué expresión algebraica relaciona y con x en la situación ❷? ______

d) ¿Cuáles son los valores de las pendientes de las rectas que representan las situaciones ❶ y ❷? ______

e) ¿Cómo son las rectas que representan las situaciones ❶ y ❷? ______

f) En ambas situaciones, las expresiones algebraicas o ecuaciones que relacionan a y con x son de la forma $y = mx + b$.

En la situación ❶:

$m =$ ______

$b =$ ______

En la situación ❷:

$m =$ ______

$b =$ ______

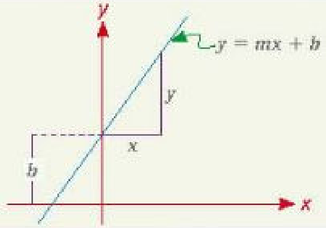
g) ¿Cuál sería la ecuación en la situación ❷ si la temperatura inicial del agua fuera de 20° C? ______ ¿Y si fuera de 25° C? ______

¿Y si fuera de 5° C? ______

La gráfica de una ecuación de la forma

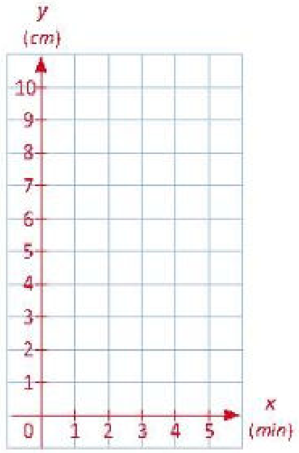
$$y = mx + b$$

es una línea recta, donde m es la *pendiente* de la recta y b es la *ordenada al origen* o punto donde la recta corta al eje y.



II. Una llave de agua surte un tinaco cilíndrico. El nivel del agua en el tinaco sube 2 cm cada minuto. Representen con y la altura del agua en el tinaco y con x el número de minutos después de abrir la llave. Con esta información construyan la tabla y la gráfica correspondientes durante los primeros 5 minutos.

x (min)	y (cm)

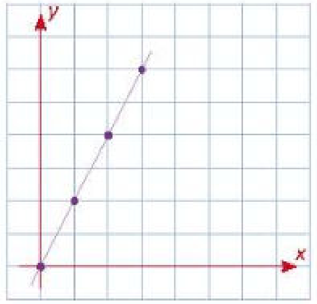


a) Ecuación que determina la tabla y la gráfica: ______

b) Pendiente de la recta: ______

c) Consideren que la altura del agua en el tinaco al abrir la llave era de 10 cm. Con base en esta información, en su cuaderno construyan la tabla y la gráfica y escriban la ecuación correspondiente.

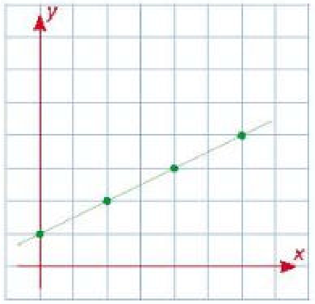
III. A la derecha de las siguientes gráficas anoten el valor de m, de b y la ecuación correspondiente.



$m =$ ______

$b =$ ______

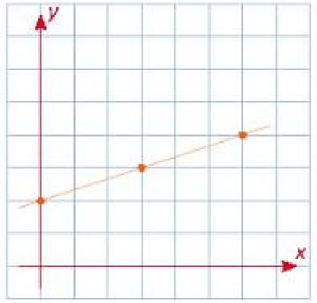
$y =$ ______



$m =$ ______

$b =$ ______

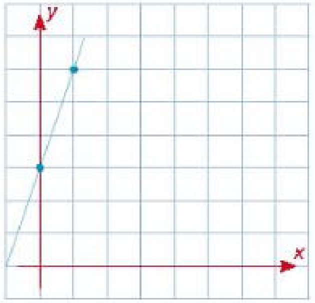
$y =$ ______



$m =$ ______

$b =$ ______

______



______

______

______

IV. En su cuaderno, tracen en cada caso la gráfica de la ecuación que:

a) Pasa por el punto (0, 0) y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.

b) Pasa por (0, 2) y tiene pendiente 1.

c) Pasa por (2, 0) y $m = 2$.

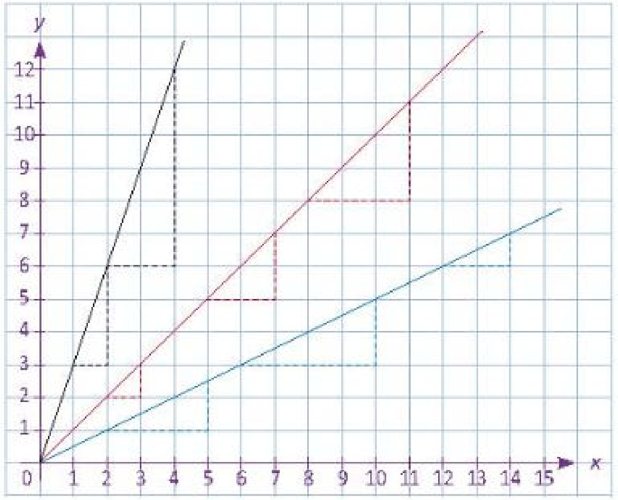
d) Pasa por (1, 2) y $m = 3$.

V. Comparen con otros compañeros sus respuestas de la lección y aclaren diferencias, si las hay.

Pendiente de una recta (3)

Relación entre el ángulo que una recta forma con la abscisa y su pendiente

I. Consideren las gráficas de tres ecuaciones que determinan diferentes ángulos con el eje x.



a) Completen la siguiente tabla:

Recta	Ecuación	Medida del ángulo con el eje x	Pendiente
Roja			
Azul			
Negra			

b) Cuando el ángulo es de 45°, ¿qué relación hay entre el cambio vertical y el cambio horizontal? ______ ¿Y cuando es menor que 45°? ______ ¿Y cuando es mayor que 45°? ______

______

II. En la gráfica de arriba, coloquen su lápiz sobre la recta roja y con centro en el origen de coordenadas gírenlo lentamente hasta hacerlo coincidir con el eje x. Consideren que en cada posición el lápiz determina una recta diferente.

a) ¿Cómo es el ángulo que la recta determina conforme se acerca al eje x? ______

b) ¿Cómo es la pendiente de cada recta conforme se acerca al eje x? ______

c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta cuando ésta coincide con el eje x? ______

Vuelvan a colocar el lápiz sobre la recta roja y ahora gírenlo lentamente hasta hacerlo coincidir con el eje y.

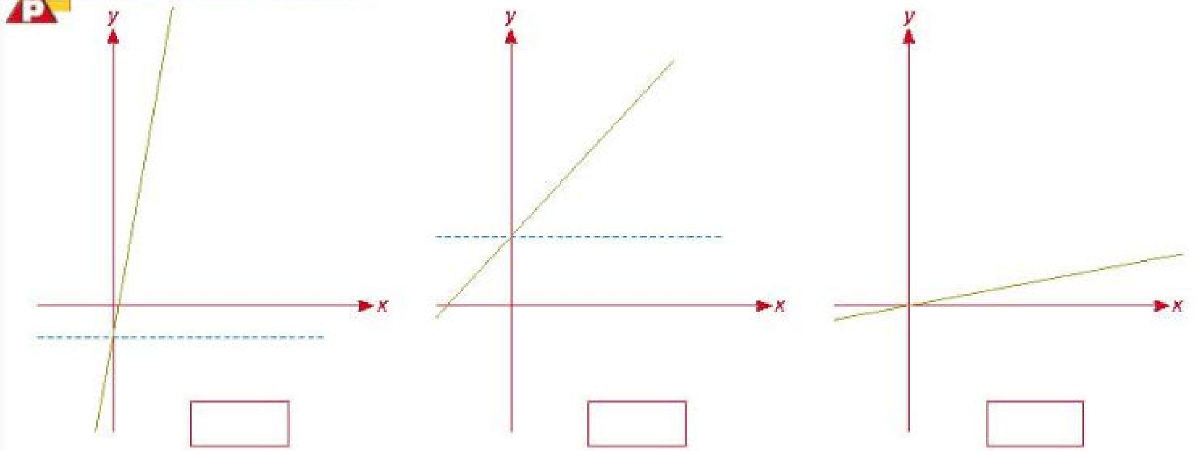
d) ¿Cómo es el ángulo que determina el lápiz conforme se acerca al eje y? ______

e) ¿Cómo es la pendiente de cada recta conforme se acerca al eje y? ______

f) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta cuando ésta coincide con el eje y? ______

III. Con ayuda de su maestro, comenten con todo el grupo lo que ocurre con el valor de la pendiente a medida que la recta se acerca al eje y y qué ocurre cuando coincide con el eje y.

IV. Observen el ángulo que cada recta forma con el eje x. Anoten en cada recuadro $\boxed{m = 1}$, $\boxed{m < 1}$ o $\boxed{m > 1}$, según corresponda.



Porque ______ Porque ______ Porque ______

V. Completen la siguiente tabla. En las tres últimas columnas anoten ✓ en la celda que corresponda.

Ecuación	Pendiente	Ángulo que forma con el eje x: mayor que 45°	igual a 45°	menor que 45°
$y = 4x + 1$				
$y = \frac{1}{3}x - 2$				
$y = x - 5$				
$y = 2x + \frac{1}{2}$				
$y = \frac{1}{2}x - 1$				
$y = x + 3$				

¿Qué conclusión obtienen después de haber completado la tabla? ______

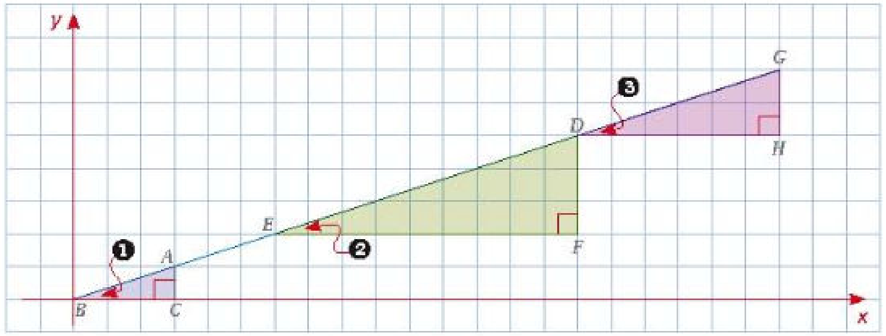
VI. Contrasten sus respuestas de las actividades **I**, **II**, **IV** y **V** con otras parejas y con ayuda de su maestro obtengan una conclusión entre todo el grupo.

VII. Analicen lo que ocurre con el valor de la pendiente cuando el ángulo que la recta forma con el eje x varía de 0° a 45° y de 45° a 90°.

El cociente de los catetos de un triángulo rectángulo (1)

Relación de los cocientes en triángulos rectángulos semejantes

I. Cuando calculamos el valor de la pendiente de una recta, seleccionamos un segmento arbitrario de ella y por los puntos que lo delimitan trazamos paralelas a los ejes, de manera que se forme un triángulo rectángulo. Si repetimos el proceso en dos segmentos más, se forman otros dos triángulos rectángulos.



Den argumentos que justifiquen que $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GDH$ son semejantes.

II. Consideren la gráfica de la actividad **I**.

En el $\triangle DEF$:

- El cateto DF se llama *cateto opuesto* al ángulo ❷.
- El cateto EF se llama *cateto adyacente* al ángulo ❷.

a) En el $\triangle ABC$:

_______ es el cateto opuesto al ángulo ❶.

_______ es el cateto adyacente al ángulo ❶.

b) En el $\triangle GDH$:

GH es _______________ al ángulo ❸.

DH es _______________ al ángulo ❸.

c) Midan los catetos de los tres triángulos y calculen el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ respecto de los ángulos ❶, ❷ y ❸.

Ángulo ❶	Ángulo ❷	Ángulo ❸
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_}$

- ¿Cómo son, en medida, los ángulos ❶, ❷ y ❸? _______________
- ¿Cómo son los cocientes $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ respecto de los ángulos ❶, ❷ y ❸?

d) ¿Qué concluyen de esta actividad? _______________

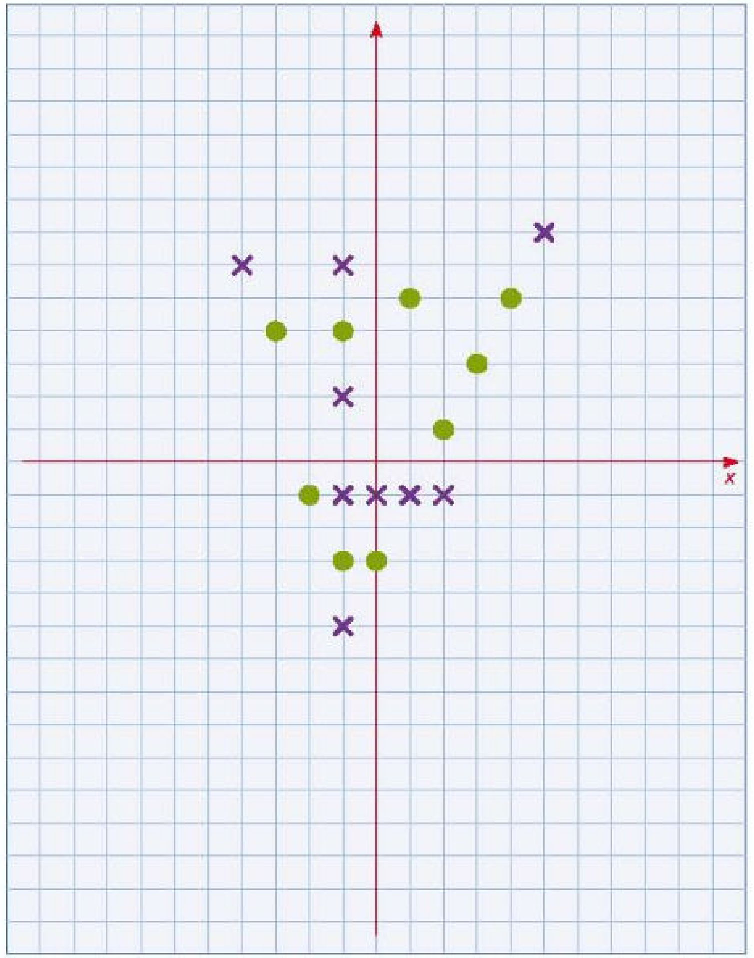
____

III. El gato ruso (Juego)

Este juego se lleva a cabo entre dos competidores, en una hoja cuadriculada, en cuyo centro hay un sistema de ejes coordenados.

El propósito del juego es lograr colocar cuatro símbolos propios en una misma línea recta, sin que haya puntos intermedios del adversario. El primer jugador que lo haga gana el juego.

Cada jugador elige un símbolo para los puntos que va a marcar en el plano cartesiano, por ejemplo, un pequeño círculo o una cruz. Tales marcas se deben hacer en la intersección de las líneas de la cuadrícula. El jugador en turno marca uno de sus puntos en el lugar que desee, diciendo en voz alta sus coordenadas. Luego el adversario hace lo mismo.



Cuando un jugador tiene ya dos puntos marcados, con los que quiere alinear un tercer punto, debe calcular la pendiente de la recta que determinan esos dos puntos y hacer que el tercero quede en dicha recta. Para ello, a partir de uno de sus puntos, debe calcular cuántos cuadritos moverse a la derecha y cuántos hacia arriba o hacia abajo, o bien, cuántos hacia la izquierda y cuántos hacia arriba o abajo, de manera que se conserve la pendiente.

Naturalmente, un jugador puede bloquear al otro, colocando puntos intermedios entre los puntos del adversario.

La ilustración de la derecha muestra una partida del juego, con las marcas de dos jugadores que usaron pequeños círculos y cruces como símbolos. Ganó el que usó cruces.

Los jugadores pueden decidir al inicio del juego si es válido usar coordenadas fraccionarias, lo que aumentaría la dificultad del juego.

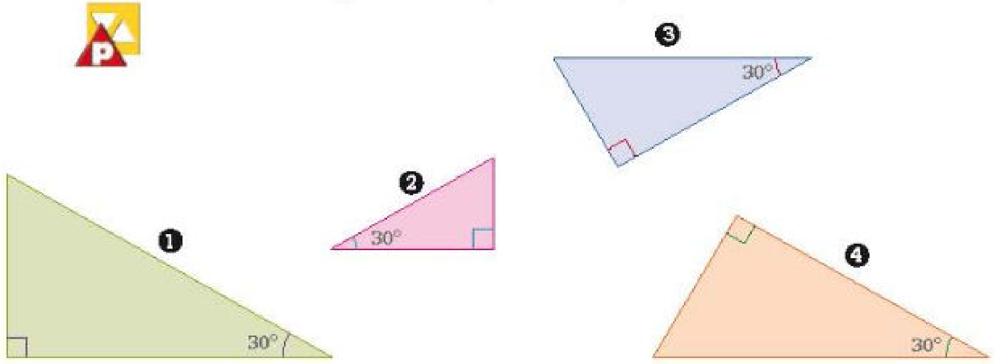
Para empezar un nuevo juego, se traza en otra hoja cuadriculada un nuevo sistema de ejes coordenados.

LECCIÓN 77

El cociente de los catetos de un triángulo rectángulo (2)

Comparación del cociente en ángulos agudos iguales

I. Consideren los siguientes triángulos rectángulos:



a) Den argumentos que justifiquen que los triángulos ❶, ❷, ❸ y ❹ son semejantes entre sí. ______________________

b) Midan los catetos de los cuatro triángulos rectángulos y completen la siguiente tabla.

	Con respecto al ángulo de 30°		
Triángulo	cateto opuesto	cateto adyacente	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
1			
2			
3			
4			

c) Expongan los argumentos que justifiquen por qué se obtienen esos resultados en la última columna de la tabla.

d) Trace cada integrante de la pareja un triángulo rectángulo diferente, en el que uno de sus ángulos mida 30°. ¿Consideran que, respecto del ángulo de 30°, el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ será igual a los cocientes obtenidos en esa tabla? ______

¿En qué basan su conjetura? ______________________

e) Verifiquen si su conjetura era correcta, haciendo los cálculos con las medidas de los triángulos que cada uno trazó.

Glosario

Conjetura
Afirmación que se supone cierta, pero que aún no ha sido probada ni refutada.

II. Consideren los mismos triángulos rectángulos que en la actividad **I**.

a) Uno de los ángulos agudos de cada triángulo rectángulo mide 30°. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo? ______ Justifiquen su respuesta. ______________________

b) Calculen el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ respecto de ese otro ángulo, y construyan una tabla como la de la actividad **I**.

c) ¿Obtuvieron el mismo resultado en todas las celdas de la última columna? ______ Justifiquen por qué ocurrió esto. ______________________

III. Tracen un triángulo rectángulo isósceles, es decir, un triángulo rectángulo cuyos catetos midan lo mismo.

a) ¿Cuanto mide cada uno de sus ángulos agudos? ______

b) Marquen cualquiera de sus ángulos y calculen el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ respecto de ese ángulo. ¿Cuál es el cociente? ______

c) Expliquen su respuesta anterior. ______________________

IV. Como resumen de las actividades anteriores, contesten lo siguiente:

a) En la actividad **I**, respecto de un ángulo de 30°, $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} =$ ______

b) En la actividad **II**, respecto de un ángulo de 60°, $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} =$ ______

c) En la actividad **III**, respecto de un ángulo de 45°, $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} =$ ______

d) ¿Qué conclusión obtienen de las respuestas anteriores? ______________________

e) Para ilustrar su última respuesta:

- Tracen varios triángulos rectángulos, en los que uno de sus ángulos agudos mida 70°. Calculen el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ con respecto al ángulo de 70°.
- Tracen varios triángulos rectángulos en los que uno de sus ángulos agudos mida 40°. Calculen el cociente $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ con respecto al ángulo de 40°.

f) ¿Coincidió su resultado en **e)** con la conclusión que dieron en **d)**? ______ Si no coincidió, revisen esa respuesta y rectifíquenla.

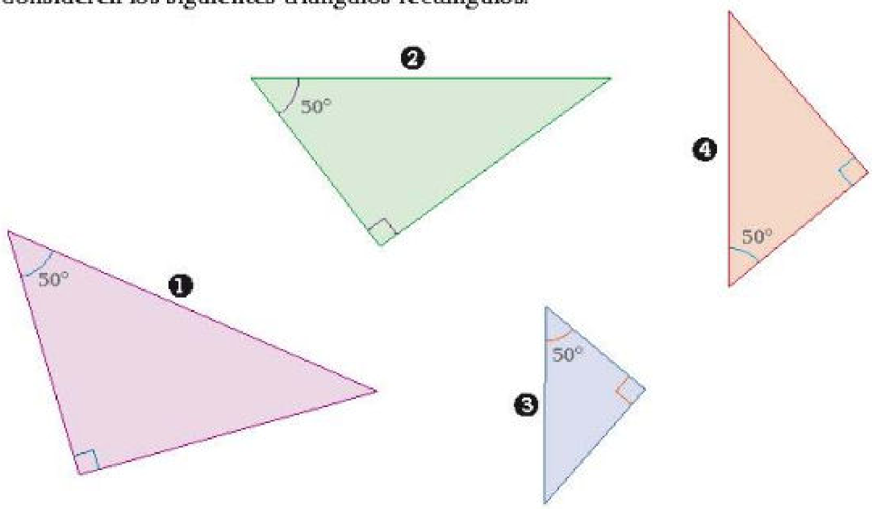
V. Redacten una conclusión que comprenda sus resultados de todas las actividades de esta lección y compárenla con la de otros equipos. Si no coinciden, analicen las razones y lleguen a un acuerdo.

LECCIÓN 78

Relación entre los lados de un triángulo rectángulo

Los ángulos agudos, el cocientes de sus lados y su relación

I. Consideren los siguientes triángulos rectángulos:



a) ¿Son semejantes los triángulos ❶, ❷, ❸ y ❹? ______ . Justifiquen su respuesta.

____

b) Midan los lados de los cuatro triángulos. Con los datos obtenidos, completen la siguiente tabla.

	Con respecto al ángulo de 50°					
Triángulo	cateto opuesto	cateto adyacente	hipotenusa	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
1						
2						
3						
4						

c) ¿Qué conclusión sacan de los resultados de las tres últimas columnas? ______

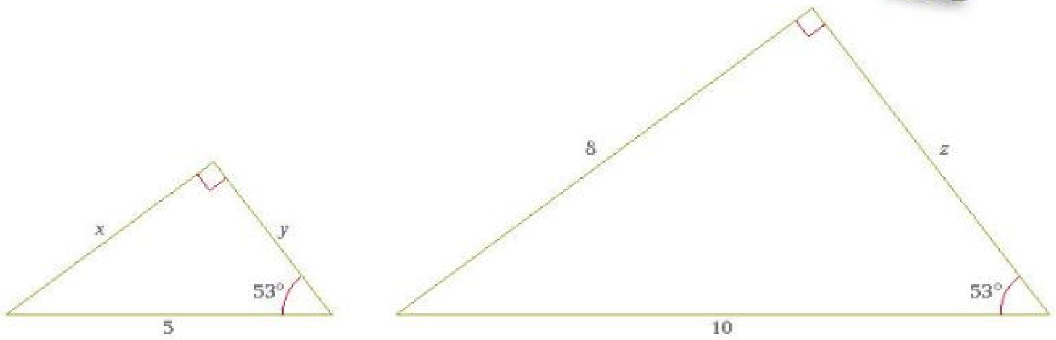
____

II. Construyan una tabla como la de la actividad **I** para el otro ángulo agudo de los cuatro triángulos rectángulos y anoten su conclusión relativa a los resultados de las tres últimas columnas. ______

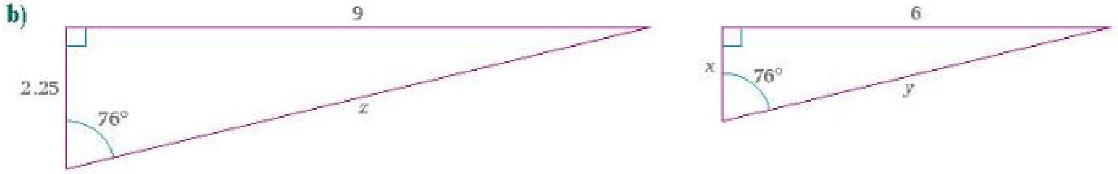
____

III. En cada pareja de triángulos rectángulos calculen los valores de x, y y z.
Sugerencia: para calcular el valor de y y z usen el teorema de Pitágoras.

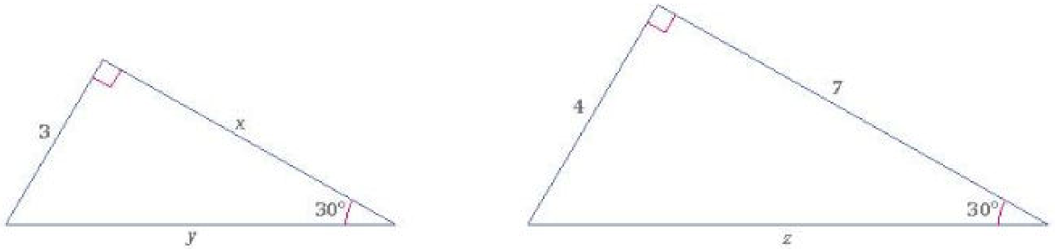
a)



b)



c)

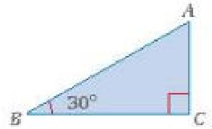


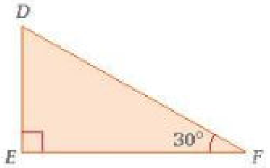
IV. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con otras parejas de compañeros. Si hay diferencias analicen por qué y corrijan lo necesario.

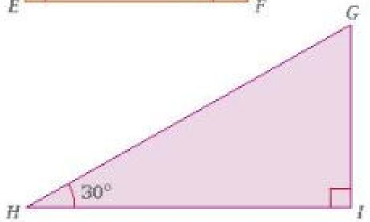
LECCIÓN 79

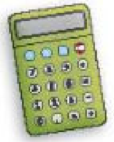
Razones trigonométricas (1)

Definición del seno, coseno y tangente de un ángulo









I. Una **razón trigonométrica** es una razón entre dos lados de un triángulo rectángulo. Una razón trigonométrica del $\triangle ABC$ es

$$\frac{AC}{AB}$$

Los triángulos rectángulos DEF y GHI tienen, como el $\triangle ABC$, también un ángulo de 30°

a) ¿Qué propiedad de semejanza asegura que los triángulos rectángulos DEF y GHI son semejantes al $\triangle ABC$? ______

b) Puesto que

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle GHI,$$

entonces las razones entre sus lados correspondientes son iguales:

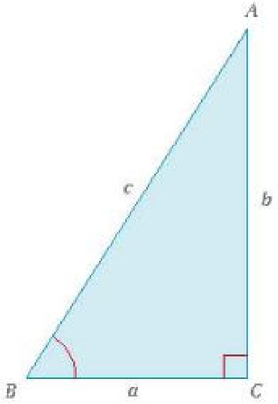
$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DF} = \frac{GI}{GH}$$

c) Midan los lados de los tres triángulos y verifiquen numéricamente estas igualdades.

d) Escriban otras igualdades de razones entre $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ y $\triangle GHI$ y verifiquenlas numéricamente. ______

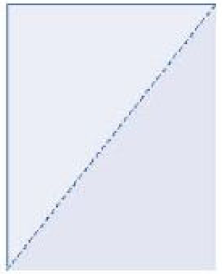
II. Las razones entre los lados de un triángulo rectángulo se llaman *seno*, *coseno* y *tangente* y se simbolizan *sen*, *cos* y *tan*.

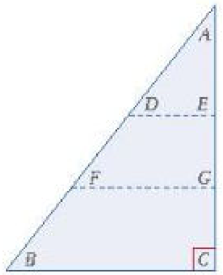
Respecto del $\angle B$ del $\triangle ABC$ de la izquierda, estas razones se definen en la siguiente tabla.



Razón trigonométrica	Abreviatura	Definición
Seno del $\angle B$	sen B	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
Coseno del $\angle B$	cos B	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
Tangente del $\angle B$	tan B	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$

En su cuaderno, construyan una tabla similar y definan estas mismas razones para el $\angle A$.





III. Para calcular el seno, coseno y tangente de un ángulo determinado, hagan lo siguiente:

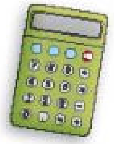
- Corten una hoja blanca de papel por una de sus diagonales. Con esto, tendrán un triángulo rectángulo.
- Nombren con A, B y C a sus vértices.
- Marquen dos dobleces al triángulo, de manera que resulten dos segmentos perpendiculares al lado AC.
- Nombren DE y FG a esos segmentos.
- Midan el $\angle A$ y el $\angle B$.

a) ¿Con qué argumento aseguran que los triángulos rectángulos ABC, ADE y AFG son semejantes? ______

b) Para el $\angle A$, el seno se puede expresar como: $\frac{DE}{AD} =$ ______ para el $\triangle ADE$

$\frac{FG}{AF} =$ ______ para el $\triangle AFG$

$\frac{BC}{AB} =$ ______ para el $\triangle ABC$



c) Para el $\angle A$, el coseno se puede expresar como: ______

d) Para el $\angle A$, la tangente se puede expresar como: ______

e) El $\angle A$ mide aproximadamente 37°.

Entonces: sen 37° = ______ cos 37° = ______ tan 37° = ______

f) Comparen estos resultados con los valores que aparecen en la tabla de la página 251, o si usan una calculadora científica presionen:

37 sin =, 37 cos =, 37 tan =

o bien sin 37 =, cos 37 =, tan 37 =

g) ¿Cómo podrían calcular sen B, cos B y tan B? ______

Háganlo y verifiquen sus resultados como en **f)**.

IV. Con apoyo de su maestro, comenten entre todo el grupo la siguiente información:

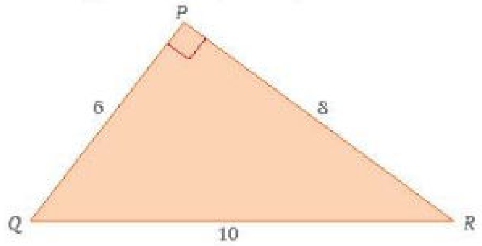
- Las razones trigonométricas son relativas a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, no a su ángulo recto.
- El valor de una razón trigonométrica depende sólo de la medida del ángulo, no depende de la longitud de los lados del triángulo.

LECCIÓN 80

Razones trigonométricas (2)

Cálculo y búsqueda del valor de una razón trigonométrica

I. Considera el siguiente triángulo rectángulo PQR.



a) Encuentra el valor del seno, coseno y tangente de los ángulos agudos del $\triangle PQR$. Expresa cada razón como una fracción simplificada y como decimal.

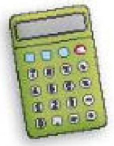
$\text{sen } Q = \frac{8}{10} = \frac{4}{6} = 0.8$ sen R = ______________

cos Q = ______________ cos R = ______________

tan Q = ______________ tan R = ______________

b) Los ángulos Q y R son complementarios, es decir $\angle Q + \angle R = 90°$. ¿Qué relación encuentras entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento? ______________ Anota estas relaciones entre los ángulos Q y R. ______________

II. Usa la tabla de razones trigonométricas de la página 251 o una calculadora científica para completar la siguiente tabla. Aproxima hasta cuatro cifras decimales.



	Medida del ángulo A								
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sen A									
cos A									
tan A									

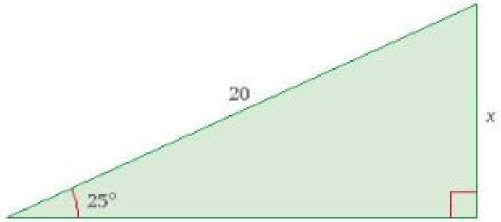
a) El complemento de un ángulo de 20° es 70°. El ángulo de 70° se puede expresar como 90° – 20°.
Escribe algunos ejemplos en los que se muestre que sen A = cos (90° – A).

____

b) Sin consultar la tabla de razones trigonométricas y sin usar la calculadora científica, calcula el valor de tan 45°. ______

c) Comenta con tus compañeros cómo hiciste ese cálculo.

III. ¿Cómo encontrar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo, conociendo las medidas de uno de sus ángulos agudos y de uno de sus lados?

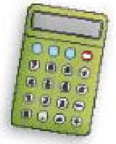


a) Se busca una razón que relacione el lado desconocido con el lado conocido: → ______________

b) Se despeja x: → ______________

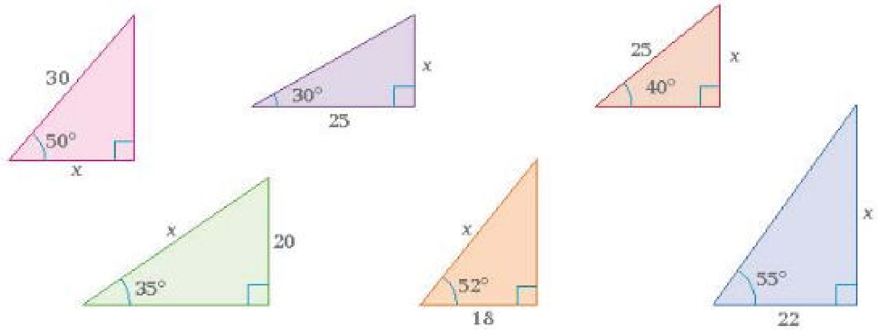
c) Se busca en la tabla sen 25° : → ______________

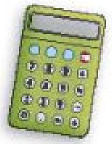
d) Se efectúa el producto indicado: → ______________



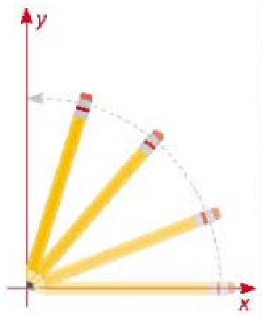
e) Analicen cada paso de este procedimiento y coméntenlo entre los integrantes de la pareja.

IV. Encuentren el valor de x.





V. En una hoja completa de su cuaderno tracen un sistema de coordenadas. Coloquen su lápiz sobre el eje x, de manera que un extremo del lápiz coincida con el origen de coordenadas. Con centro en el origen, giren lentamente el lápiz hacia su izquierda, hasta que coincida con el eje y. En cada posición del lápiz se genera un triángulo rectángulo, donde el lápiz mismo determina la hipotenusa.



a) La primer vez que lo hagan, imaginen qué ocurre con el valor del seno del ángulo a medida que el ángulo se hace mayor, es decir, cómo varía el cociente del cateto opuesto sobre la hipotenusa al aumentar el valor del ángulo.

b) La segunda vez que lo hagan, imaginen qué ocurre con el valor del coseno.

c) La tercera vez, lo que ocurre con el valor de la tangente.

d) Cuando hayan determinado cómo cambian estas tres razones al aumentar el valor del ángulo, verifiquen qué ocurre con cada razón analizando cada columna de la tabla de razones trigonométricas (pág. 251), desde que el ángulo mide 1° hasta que mide 89°.

LECCIÓN 81

Resolución de triángulos rectángulos

La razón trigonométrica como herramienta para medir ángulos

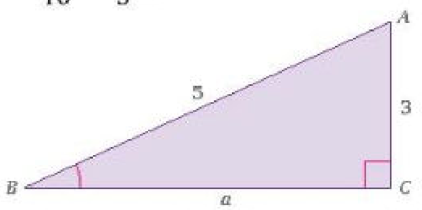
I. Si sabemos que sen $B = 0.6$, ¿cómo encontramos el valor de $\measuredangle B$?

Antes de continuar con las siguientes actividades, discutan en el equipo cómo resolver este problema. Luego cada equipo exponga ante todo el grupo la manera como lo resolvió y, con apoyo del maestro, analicen los diferentes procedimientos para resolver problemas como éste.

II. La información que se nos proporciona es

$$\text{sen } B = 0.6$$

Dado que $0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, podemos construir un diagrama como el siguiente:



$\text{sen } B = \frac{3}{5}$

Si sen $B = 0.6$, buscamos en la tabla de razones trigonométricas para qué ángulo el valor del seno es 0.6, o lo más cercano a ese valor:

Ángulo	seno	coseno	tangente
⋮	⋮	⋮	⋮
36°	0.5878	0.8090	0.7665
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6857	0.7880	0.7813
⋮	⋮	⋮	⋮

Conforme a esta tabla, el valor más aproximado es $\measuredangle B = 37°$.
Puesto que $\measuredangle B = 37°$, entonces $\measuredangle A =$ ______

Esta misma búsqueda puede hacerse con una calculadora científica, presionando las siguientes teclas:

0.6 [2nd] [sin⁻¹] [=] o bien [2nd] [sin⁻¹] 0.6 [=]

Para saber el valor de todos los lados y ángulos del $\triangle ABC$, sólo falta calcular el valor del cateto a. Para ello usen el teorema de Pitágoras.

En resumen, en el $\triangle ABC$, $\measuredangle C =$ ______ $AC =$ ______
$\measuredangle B =$ ______ $AB =$ ______
$\measuredangle A =$ ______ $BC =$ ______

> *Resolver un triángulo* significa encontrar las medidas de todos sus lados y todos sus ángulos.

III. En su cuaderno, y con base en la información que se proporciona, resuelvan los siguientes triángulos. En cada caso tracen el triángulo y anoten en el lugar correspondiente los elementos conocidos y con literales los que falta por conocer.

a) cos $E = 0.75$

b) tan $H = 1.6$

c) sen $K = 0.4$

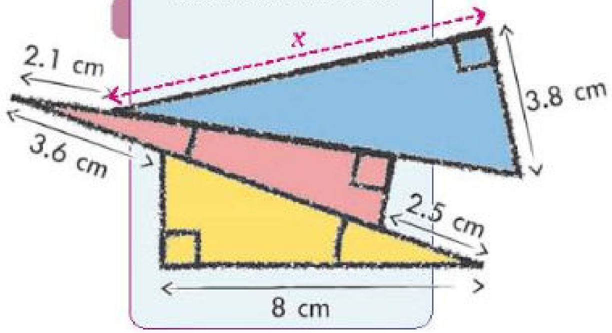
IV. Tracen un diagrama que ilustre la información que se proporciona y la que falta por determinar.

a) Si sen $A = \frac{5}{8}$, calculen cos $A =$ ______
tan $A =$ ______
$\measuredangle A =$ ______

b) Si cos $B = \frac{3}{10}$, calculen sen $B =$ ______
tan $B =$ ______
$\measuredangle B =$ ______

Reto

Calcula el valor de x.



c) Si tan $C = \frac{3}{5}$, calculen sen $C =$ ______
cos $C =$ ______
$\measuredangle C =$ ______

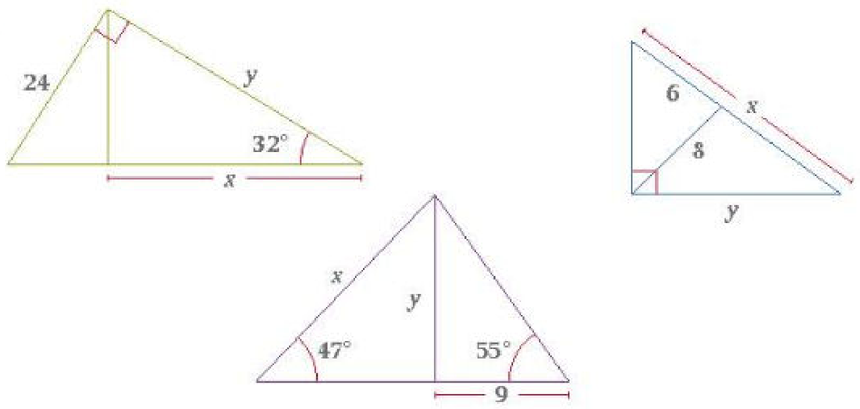
d) Si tan $D = 1$, calculen sen $D =$ ______
cos $D =$ ______
$\measuredangle D =$ ______

V. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con las de otros equipos de compañeros. Si hay diferencias analicen las razones y, con ayuda de su maestro, corrijan lo necesario.

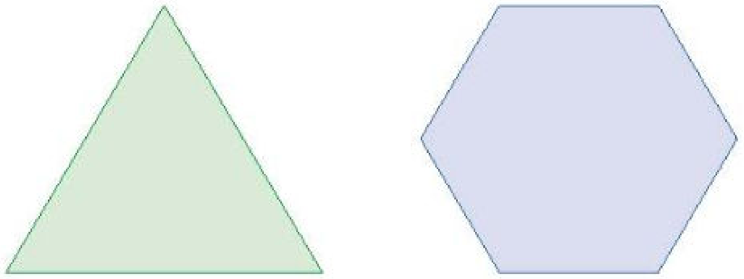
Aplicación de las razones trigonométricas

Problemas que se resuelven con trigonometría

I. Calculen el valor de x y de y en las siguientes figuras.

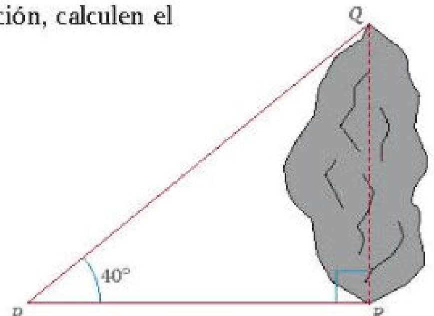


II. Con base en las medidas que se anotan, calculen el área del triángulo equilátero y del hexágono regular.

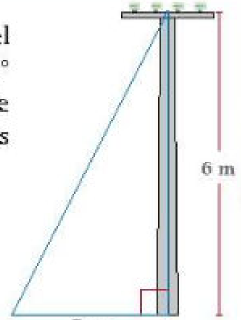


III. En el trazo de una carretera, para calcular el largo de una roca, una topógrafa marcó el punto P a 240 m del punto R, desde el cual se observan los extremos Q y R de la roca, bajo un ángulo de 40°. El ángulo que forman las líneas PR y QR es de 90°.

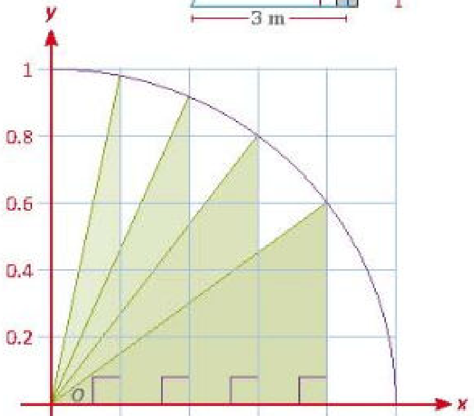
Con esta información, calculen el largo de la roca.



IV. A los trabajadores de la compañía de luz les recomiendan que el cable que soporta a un poste forme un ángulo no mayor de 60° con respecto al nivel del piso. El poste mide 6 m de alto y el cable lo fijan a 3 m de su base. Calculen si en este caso los trabajadores están atendiendo la recomendación.

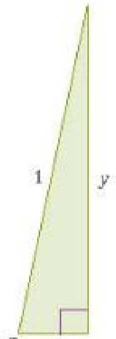


V. En el plano cartesiano de la derecha se trazó la cuarta parte de un círculo de radio 1 y se hicieron marcas a cada 0.2 unidades en ambos ejes. Se trazaron triángulos rectángulos determinados por líneas verticales desde los puntos marcados en el eje x hasta el cruce con la circunferencia, y por la unión de cada uno de estos cruces con el origen.



Usen el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para completar la siguiente tabla de valores, correspondientes a los cuatro triángulos rectángulos formados.

Medida de la hipotenusa	Valor de x	Valor de y	sen O	cos O
1	0.2	0.98		
1	0.4			
1	0.6			
1	0.8			



El triángulo de la izquierda está sacado de la figura de arriba, cuando $x = 0.2$. Para calcular, por ejemplo, el valor de y en este triángulo, se usa el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(0.2)^2 + y^2 &= 1\\ 0.4 + y^2 &= 1\\ y^2 &= 1 - 0.04\\ y^2 &= 0.96\\ y &= \sqrt{0.96}\\ y &= 0.98\end{aligned}$$

¿Qué conjetura pueden hacer acerca del par ordenado (x, y) respecto del sen O y del cos O? ______________________

VI. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con las de otros equipos. ¿Coinciden? Si no, analicen por qué y corrijan.

LECCIÓN 83

Razón de cambio (1)

Razón de cambio positiva

I. Elizabeth y Saúl colocaron agua en una olla, en la cual también pusieron un termómetro para medir cómo aumentaba su temperatura al colocar la olla sobre la flama de un mechero.

a) Al principio, la temperatura del agua era de 10 °C y aumentó 15 °C cada minuto, hasta hervir. Completa la siguiente tabla que relaciona el tiempo t, con la temperatura T.

t (min)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
T (°C)	10		25										

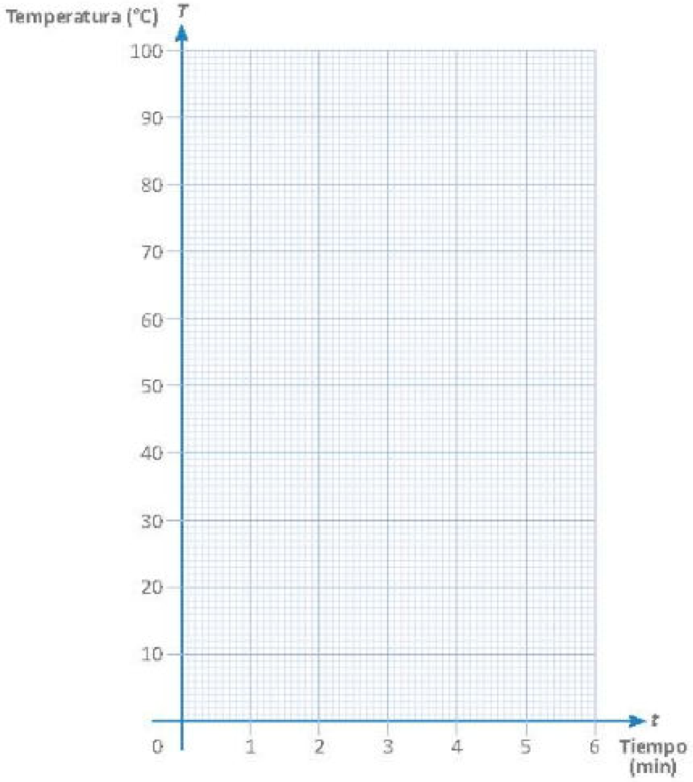
b) Si el agua hierve a 100 °C, ¿después de cuántos minutos en el mechero hervirá?

____

c) Escribe una ecuación que relacione a la temperatura T en función del tiempo t.

$T =$ ______________. Verifica que los valores de la tabla cumplen con la ecuación.

d) En el siguiente sistema de coordenadas, grafica la relación que corresponde. Nota que, mientras la olla está en el fuego, también pueden tomarse todos los valores intermedios entre dos puntos cualesquiera de la gráfica, es decir, la gráfica es continua.



II. Es claro que conforme aumenta el tiempo de la olla en el fuego, también aumenta la temperatura del agua. ¿Cómo se relacionan estos incrementos.

a) Entre los 3 y 5 minutos, ¿cuánto se incrementó la temperatura? ________ °C.

b) En el tiempo transcurrido entre 1 y 4 minutos, ¿en cuánto se incrementó la temperatura? ______ °C.

c) El símbolo de incremento va asociado con la literal de la variable que cambia; así, el incremento del tiempo se representa como Δt, y el de la temperatura como ΔT.

En el inciso **a** conviene escribir: $\Delta t =$ ________ y $\Delta T =$ ________;

en el inciso **b** conviene escribir: ________ = ________ y ________ = ________

d) Entre 3 y 5 minutos, ¿cuál es el cociente, o la razón, entre los incrementos? $\Delta T/\Delta t =$ ________

e) Entre 1 y 4 minutos, ¿cuál es la razón, entre los incrementos? $\Delta T/\Delta t =$ ________

f) En los incisos **a** y **b**, los valores de las variables eran distintos; lo mismo ocurría con sus incrementos. ¿Cómo son los valores que se obtuvieron en las razones? ______________

g) Consideren otro par de puntos de la tabla, llámenles A y B. Tomen A (0.5, ____), y elijan el B (________, ________). Ahora, calculen la razón de los incrementos entre estos dos puntos $\Delta T/\Delta t =$ ________.

¿Coincide este valor con las razones $\Delta T/\Delta t$ que calcularon antes? ________

h) Seguramente, algunos de sus compañeros eligieron otros valores para el punto B. Comparen sus resultados, y si alguno es distinto, aclaren dónde hubo error.

Glosario

Incremento de una variable
Es el cambio de la variable entre dos valores específicos. Los incrementos se representan con la letra delta mayúscula del alfabeto griego, Δ, pero ésta necesariamente va asociada con la literal de la variable que cambia.

III. En este caso hemos visto que, sin importar los puntos que tomáramos, la razón de los incrementos permanece constante.

a) Uno de los datos en el inciso **I. a** es igual a la razón de los incrementos, ¿cuál es? ______________________.

b) ¿Qué es lo que cambia en este problema conforme avanza el tiempo? ________ ______________________.

> El cociente de los incrementos se llama **razón de cambio**.

c) La razón de cambio calculada no tiene sólo unidades de temperatura ni únicamente unidades de tiempo. Está dada en ______________________.

LECCIÓN 84

Razón de cambio (2)

Razón de cambio y la inclinación de la recta

En la lección anterior, la razón de cambio de la temperatura del agua con respecto al tiempo fue de 15 °C por minuto, o lo que sería igual a 0.25 °C por segundo, también a 900 °C por hora, etcétera. Se puede decir que esa era la rapidez con la que se elevaba la temperatura. Cualquier razón de cambio con respecto al tiempo puede llamarse rapidez.

I. ¿Saben cómo se mide la rapidez de lectura? Vamos a descubrirlo. Para hacerlo, requieren de un texto del cual conozcan la cantidad de palabras o letras y de un cronómetro.

a) Discutan cuál de las siguientes razones de cambio es mejor para medir la rapidez de lectura, señalando las razones de la elegida y digan cómo puede medirse: 1) Palabras por segundo; 2) Palabras por minuto; 3) Palabras por año; 4) Libros por minuto; 5) Libros por año; 6) Letras o caracteres por segundo; 7) Letras o caracteres por día.

Elegimos ______________________________

porque ______________________________

____

y lo mediremos ______________________________

____

____

b) La técnica más común es utilizar las palabras y cualquier unidad de tiempo, usualmente minutos. Ello no significa que sea la mejor. Tomen un texto de una cuartilla, cuenten las palabras que tiene y dénselo a leer a quienes quieran medir su rapidez de lectura. Midan el tiempo que tarda, en segundos, en leer el texto.

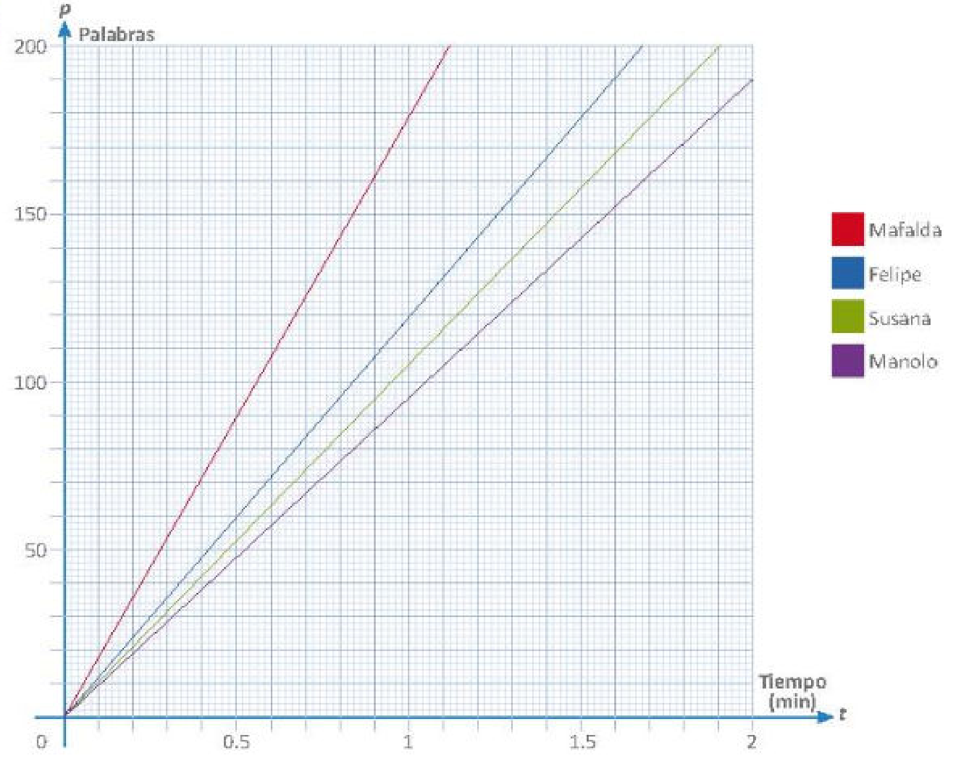
Tiempo, t = __________; Palabras, p = __________

c) Para medir una razón de cambio, se deben tener las coordenadas de al menos dos puntos. Aquí, con sus mediciones, sólo tienen las coordenadas de un punto (t, p). Sin embargo, si han transcurrido cero segundos, ¿cuántas palabras se han leído? __________. Eso nos da las coordenadas de otro punto (0, ____).

d) Si suponemos que se avanza uniformemente en la lectura, la gráfica debe ser una línea __________ que parte del punto (0, 0) y termina en (_____, _____).

e) Entre esos dos puntos calculamos los incrementos en la cantidad de palabras y en el tiempo: Δp = _____, Δt = _____ y por lo tanto, la rapidez de lectura $\Delta p/\Delta t$ = _____ palabras por segundo (usa dos o tres decimales). Para transformar a palabras por minuto, sólo multiplica ese cociente por 60.

II. En la siguiente gráfica se muestra la rapidez de lectura de cuatro amigos.



a) ¿Quién lee más rápido? __________, ¿y quién más despacio? __________

b) Si la gráfica no tuviera marcados los números, podríamos contestar la pregunta anterior fijándonos tan sólo en ______________________________, ya que ésta indica también ______________________.

c) Sabiendo que la razón de cambio es $\Delta p/\Delta t$, escriban en la gráfica, junto al nombre, el valor aproximado de la rapidez de lectura de cada uno de los amigos.

III. A Patricia se le ocurrió usar una computadora para medir la rapidez de lectura. Tomó un texto de tres cuartillas, lo imprimió y se lo dio a leer a una persona. Tomó el tiempo y una vez transcurrido un minuto, señaló la palabra donde se quedó la persona. En el procesador de texto borró todas las palabras posteriores y leyó en la barra de estado la cantidad de palabras que se habían leído en un minuto.

Página: 3 de 3 | Palabras: 956 | Español (México)

a) ¿Es correcto lo que hizo Patricia? ________

b) Si en lugar de hacer leer a la persona durante un minuto, lo hubiera hecho durante 30 segundos, ¿qué operación tendría que haber efectuado con la cantidad de palabras que indicaba el procesador? ______________

IV. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con las de otros equipos. ¿Coinciden? Si no, analicen por qué y corrijan.

LECCIÓN 85

Razón de cambio (3)

Razón de cambio diferente

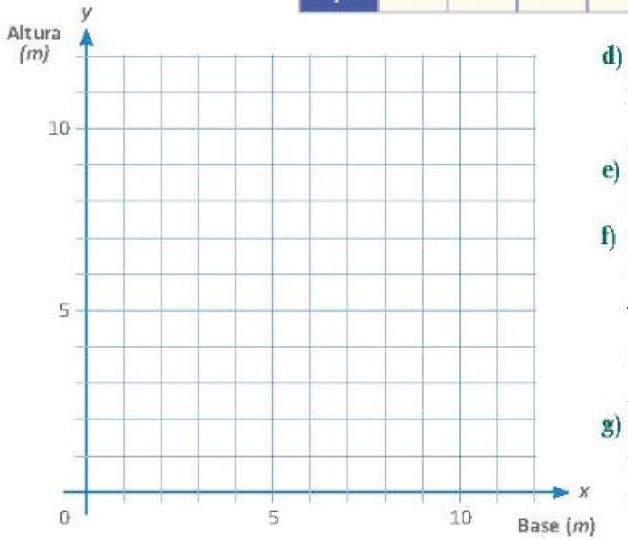
I. En la primera lección de este libro, hicieron una actividad donde formaron diferentes rectángulos que tenían un perímetro de 24 metros.

a) Si designan con x a la base y con y a la altura, escriban una igualdad que las relacione: ____________________

b) De la igualdad anterior expresen a la altura en función de la base: $y =$ ______

c) En la tabla siguiente, asignen a x diferentes valores, de 0 a 12, en la igualdad anterior y obtengan los correspondientes valores de y.

x	0										12
y											



d) ¿Qué pasaría si asignan a x valores fuera del rango 0 a 12? ____________________

____

e) En el sistema de coordenadas siguiente, grafiquen los puntos que obtuvieron.

f) ¿Es posible asignar a x cualquier valor dentro del rango 0 a 12, por ejemplo $x = 7.3405$ y obtener un valor factible para y? ______ Justifiquen su respuesta ____________________

____

g) De acuerdo con la respuesta anterior, ¿la gráfica que describe a y como función de x debe ser continua o no? ______

II. Hay una diferencia muy importante entre la línea recta que representa este fenómeno con el de las dos lecciones anteriores. Vamos a verlo con cuidado.

a) Consideren las coordenadas de dos puntos (x, y), cualesquiera de los que graficaron.

(____, ____) y (____, ____)

b) Cuando se incrementa x, ¿qué le pasa a y, aumenta o disminuye? ____________

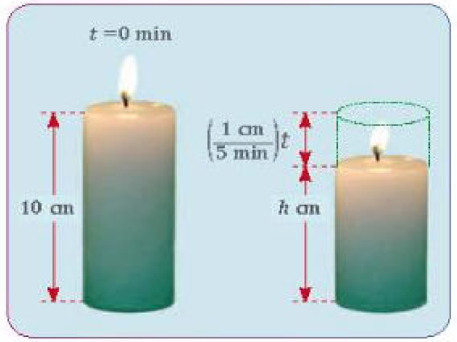
c) Cuando se incrementa y, ¿qué le pasa a x, aumenta o disminuye? ____________

d) Calculen los respectivos incrementos $\Delta x =$ ______ y $\Delta y =$ ______. ¿Ambos incrementos deben ser del mismo signo? ______

e) Calculen la razón de cambio $\Delta y/\Delta x =$ ______ ¿de qué signo es? ____________

f) Ya sabemos que cuando la ecuación que liga dos variables se representa con una recta, hay una razón de cambio constante. Por lo tanto, a todos sus compañeros debió darles el mismo resultado que a ustedes. Verifíquenlo y en los casos en que haya discrepancia, con ayuda del profesor, determinen dónde está el error.

III. Alberto encendió una vela de 10 cm de altura y ésta se consumía a razón de 1 cm cada 5 minutos.



a) En el tiempo $t = 0$ minutos, la vela mide $h =$ ______ cm de altura. En el tiempo $t = 5$ minutos, la vela mide $h =$ ______ cm de altura.

b) Consideren los dos puntos de coordenadas (t, h) del inciso **a)** y calcula $\Delta t =$ ______; $\Delta h =$ ______

c) ¿Los incrementos son del mismo signo?, esto es, ambas variables, t y h, ¿aumentan o decrecen simultáneamente? ______

d) De acuerdo a los valores que obtuvieron para los incrementos, calculen la razón de cambio:

$\Delta h/\Delta t =$ ______

e) Escriban una ecuación que represente la altura h de la vela en función del tiempo t transcurrido:

$h =$ ______

f) Al resolver la ecuación para $h = 0$, se obtiene el valor del tiempo t para el cual la vela ____________________

g) En la tabla siguiente, asignen a t diferentes valores, de 0 a 50, en la igualdad anterior y obtengan los correspondientes valores de h.

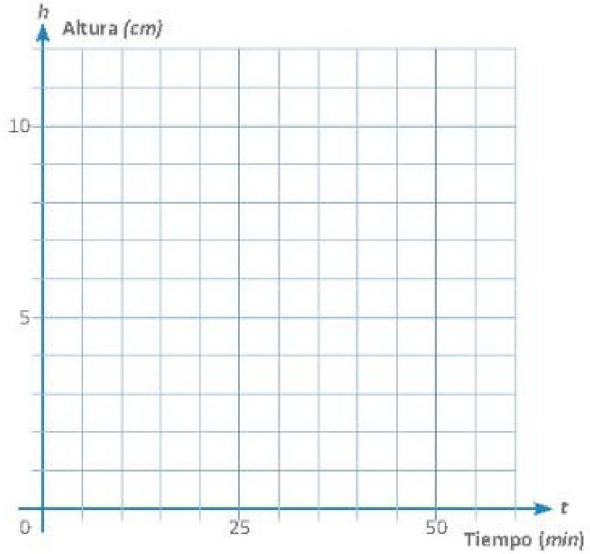
t	0										50
h											

h) ¿Qué pasaría si asignan a t valores fuera del rango 0 a 50?

____

____

____



i) En el sistema de coordenadas de la derecha, grafiquen los puntos que obtuvieron en la tabla.

j) En este caso, y en el del principio de la lección, las gráficas de las rectas tienen la inclinación en sentido distinto al de las dos lecciones anteriores. Ello se debe a que la razón de cambio es ____________________.

IV. Comparen sus respuestas de las actividades de esta lección con las de otros equipos. Si no coinciden, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 86

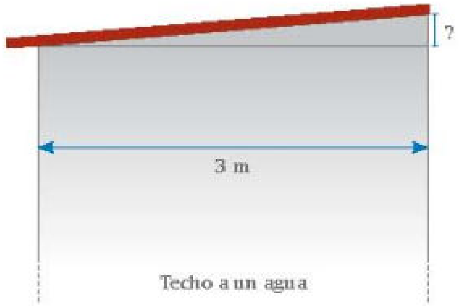
Razón de cambio (4)

Pendiente de la recta

I. Cuando yo estudiaba secundaria, mi mamá contrató a don Marcelino, un albañil, para que construyera un cuarto de lavado en el patio. Le dio las dimensiones y le dijo: "el techo lo hace 'a un agua', con pendiente de 2%, que escurra hacia el sur". El albañil, sin la primaria terminada, pero hábil en su oficio, terminó el cuarto cumpliendo las especificaciones. Desde el inicio me intrigó cómo resolvería el asunto de la pendiente, que no era otra cosa que la inclinación que debería darle al techo para que escurriera el agua de lluvia. Así que, cuando llegó el momento de hacer el techo del cuarto, le pregunté a don Marcelino cómo mediría la pendiente. "Fácil, por cada metro que recorra horizontalmente, subo 2 centímetros verticalmente", me contestó. Yo me dije: "¡Pues sí!, 2 de cada 100, es decir, 2/100= 0.02 = 2%, ¡claro!"

a) El cuarto tenía 3 metros en la dirección que escurriría el agua. ¿Cuántos centímetros se debería elevar el techo para que escurriera el agua con una pendiente de 2%? _____ cm.

b) En el siguiente esquema se representan el cuarto y la explicación del albañil. Si denotamos con x a la longitud horizontal del techo y con y a la altura ¿cuánto se incrementan? Δx = _____ cm y Δy = _____ cm.



Pendiente de 2%

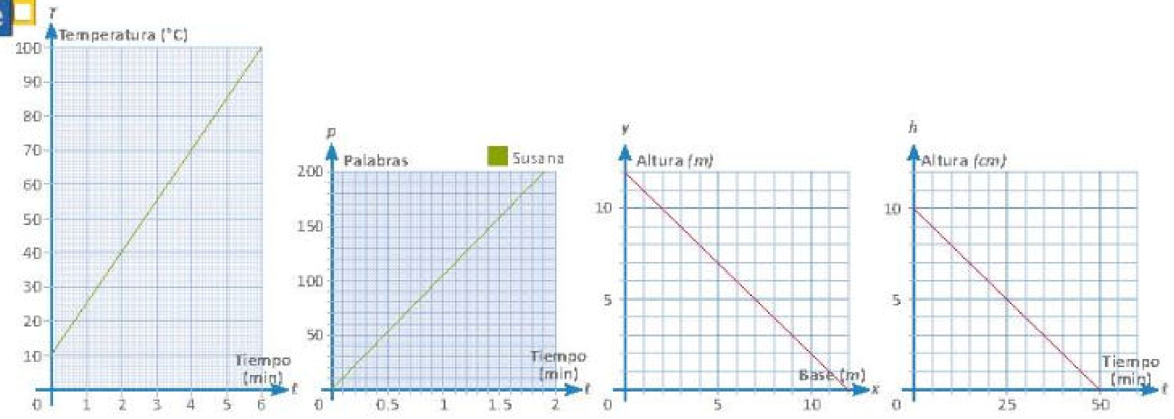
Nota: Este esquema no es proporcional.

c) ¿Cuánto es la razón de cambio? $\Delta y/\Delta x$ = __________. ¿Se corresponde con el 2%? __________. ¿Qué función trigonométrica del ángulo θ representa $\Delta y/\Delta x$? ______________________

d) No importa qué valor se tome de la x, la y correspondiente a la elevación hará que la razón de cambio sea __________. En otras palabras, una recta, o el techo en este caso, siempre tiene la misma __________ en todos sus puntos.

Hay un elemento más en el caso de la pendiente, mi mamá dijo "que escurra el agua hacia el sur", dando con ello la dirección, si hubiese dicho "que escurra el agua hacia el norte", la razón de cambio sería negativa y la inclinación del techo sería en sentido contrario a la anterior.

II. Las gráficas que hemos visto en las tres lecciones anteriores, y sus ecuaciones, son.



$T = 15t + 10$ $p = 105t$ $y = -x + 12$ $h = -0.2t + 10$

a) ¿Cuánto fue la razón de cambio en la actividad del calentamiento del agua? $\Delta T/\Delta t$ = __________ ¿Se relaciona con algún elemento de la ecuación respectiva? _____

b) ¿Cuánto fue la razón de cambio en el caso de la rapidez con que leía Susana? $\Delta p/\Delta t$ = _____ ¿Se relaciona con algún elemento de la ecuación respectiva? _____

c) ¿Cuánto fue la razón de cambio en el caso de la altura, respecto a la base, del rectángulo con perímetro 24 m? $\Delta y/\Delta x$ = _____ ¿Se relaciona con algún elemento de la ecuación respectiva? _____

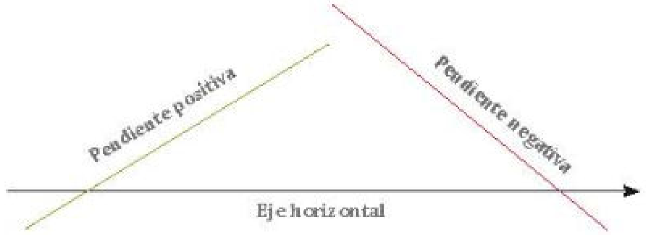
d) ¿Cuánto fue la razón de cambio en el caso de la rapidez con que se consumía la vela? $\Delta h/\Delta t$ = _____ ¿Se relaciona con algún elemento de la ecuación respectiva? _____

Podemos concluir que la razón de cambio se relaciona con el ____________ de una de las ____________, cuando la otra está despejada.

III. Si se avanza en la dirección positiva del eje horizontal, la inclinación o pendiente de la recta es positiva cuando la recta va "de subida", y la pendiente tiene valor negativo cuando la recta va "de bajada".

a) ¿Cuáles de las gráficas mostradas en la actividad anterior tienen pendiente positiva? ______________________

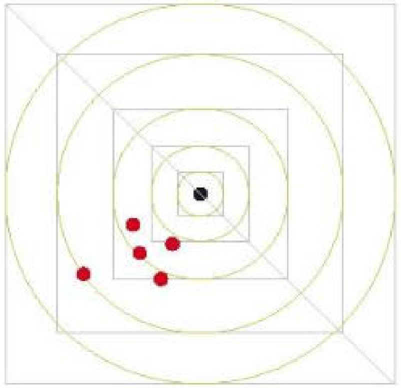
b) ¿Cuáles de las gráficas mostradas en la actividad anterior tienen pendiente negativa? ______________________



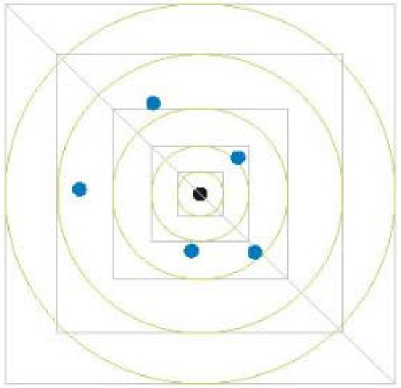
Dispersión y rango

Cálculo del rango

I. En un entrenamiento para tripulación aérea se hizo la siguiente competencia: descargar mediante paracaídas 5 objetos, los cuales deberían caer lo más cerca posible a un punto marcado en tierra. Los siguientes diagramas muestran, desde una vista a gran altura, el resultado de la prueba de los dos mejores equipos. La marca del objetivo es el centro de los círculos. En equipo, contesten las siguientes preguntas.



Equipo *A*



Equipo *B*

a) ¿Qué equipo dejó un paquete más cerca del objetivo? El _____

¿Qué equipo dejó un paquete más lejos del objetivo? El _____

b) ¿Qué equipo dispersó menos los paquetes? El _____

c) Tomen una regla graduada en milímetros y midan las distancias de cada paquete al objetivo y, para cada equipo, ordénenlas de menor a mayor. Llenen la tabla a la izquierda con los valores correspondientes.

Equipo A	Equipo B

d) Para el equipo *A*, ¿cuál es la distancia promedio de los paquetes hacia el objetivo? __________

e) Para el equipo *B*, ¿cuál es la distancia promedio de los paquetes hacia el objetivo? __________

f) Considerando ahora los valores, ¿qué equipo dispersó menos los paquetes? El equipo _____. Justifiquen su respuesta ______________________________

____

g) Para cada equipo, calculen la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de las distancias. A eso se le llama **rango**.

Rango del equipo A = ________. Rango del equipo B = ________

h) Considerando ahora los rangos, ¿qué equipo dispersó menos los paquetes? El equipo _____

i) Su respuesta, ¿coincide con lo que contestaron en los incisos **b)** y **f)**? ________

II. Dos máquinas que hacen barras de acero de 3 metros de largo NO hacen todas exactamente del mismo tamaño. Con el fin de comparar su precisión, se tomó una muestra con 100 barras de la producción de cada máquina, se midió su largo y se anotaron las diferencias en milímetros. Si la barra mide más de tres metros, se anota la cantidad que lo excede, y se anota una cantidad negativa cuando le falta. A continuación se muestran las tablas que concentran los resultados de estas mediciones.

Máquina *A*									
Desviación	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Frecuencia	4	5	6	10	50	10	6	5	4

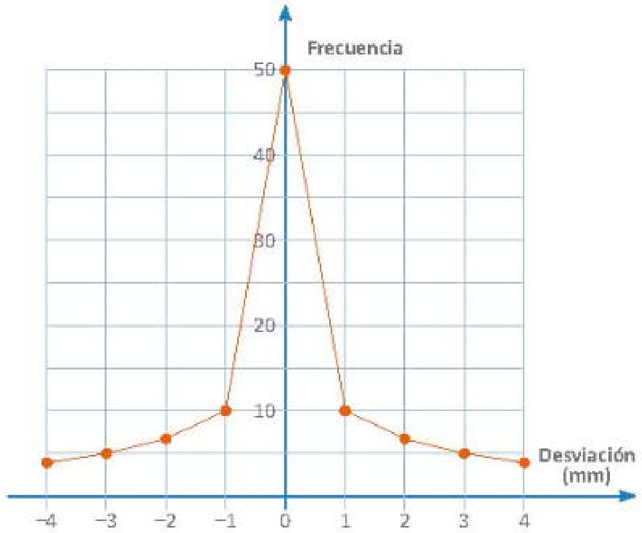
Máquina *B*									
Desviación	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Frecuencia	0	0	5	30	40	20	5	0	0

a) La gráfica de la derecha corresponde a los datos de la máquina *A*. Tracen ahí mismo la gráfica que corresponde a los resultados de la máquina *B*.

b) Para las desviaciones de la máquina *A*, calculen la media ________ y la mediana ________

c) Para las desviaciones de la máquina *B*, calculen la media ________ y la mediana ________

d) Calculen los rangos de los valores de las desviaciones. Rango de las desviaciones de A = ________. Rango de las desviaciones de B = ________



III. Supongan que en lugar de haber dado las anotaciones de las deficiencias y los excesos, se hubieran dado las longitudes de las barras.

a) Para las longitudes de las barras de la máquina *A*, calculen la media ________ y la mediana ________

b) Para las longitudes de las barras de la máquina *B*, calculen la media ________ y la mediana ________

c) Para las longitudes de las barras calculen los respectivos rangos. Rango de las longitudes de A = ________. Rango de las longitudes de B = ________

LECCIÓN 88

Desviación media

Cálculo de la desviación media

Glosario

Dispersión. *Mat.* Distribución estadística de un conjunto de valores.

En la lección anterior se introdujeron dos conceptos importantes: **desviación** y **rango**. En ambas actividades medimos las desviaciones hacia un objetivo determinado: qué tan alejados caían los paquetes de donde debían caer (actividad **I**) y cuánto faltaba o sobraba de lo que debía medir la barra (actividad **II**). Sin embargo, para un conjunto de datos cualquiera, también se puede medir la desviación respecto a la media, lo que nos dirá el grado de dispersión de los datos.

I. Considera los datos siguientes, que son las estaturas en centímetros de un grupo de cinco amigos: 150, 155, 160, 160, 165.

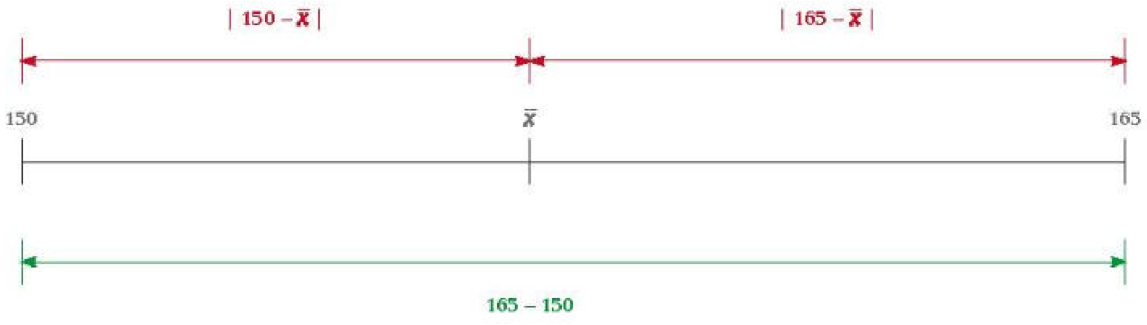
a) Calcula el rango de los datos. Rango = ________

b) Calcula la media de estos datos. $\bar{x}$ = ______

c) Calcula las cinco desviaciones de estos datos con respecto a la media, restando la media al dato correspondiente: ______, ______, ______, ______, ______ (Sí, unas son positivas y otras son negativas).

d) Calcula el promedio de las desviaciones. ______. ¡Qué crees!, no importa qué datos tengas, ni cuántos sean, el resultado siempre será cero.

e) Calcula los valores absolutos de las cinco desviaciones de estos datos con respecto a la media. ______, ______, ______, ______, ______ Todos son positivos, pues eso hace el valor absoluto, calcula la distancia entre un dato y otro, sin importar la dirección, tal como hiciste en la actividad **I** de la lección anterior. (¿Ya te fijaste cuánto suman las dos desviaciones absolutas del dato mayor y el dato menor?).



f) Calcula el promedio de los valores absolutos obtenidos. ____________. A este valor se le conoce como **desviación absoluta promedio** o, llanamente, **desviación media**.

II. Si bien el rango, la resta del mayor valor menos el menor, nos da una medida de dispersión de los datos, pues nos informa que entre estos dos valores están todos los demás, la desviación media complementa la información porque nos dice qué tan cercanos o lejanos están los datos respecto al promedio.

a) Para las máquinas de la actividad **II** de la lección anterior, los datos de las longitudes de las barras se pueden obtener fácilmente, pues tenemos el defecto o el exceso de éstas sobre los 3 metros. Coloquen los datos correspondientes en las tablas.

Máquina *A*									
Longitud (*cm*)	296						302		
Frecuencia	4	5	6	10	50	10	6	5	4

Máquina *B*									
Longitud (*cm*)	296						302		
Frecuencia	0	0	5	30	40	20	5	0	0

b) Calculen el rango de las longitudes de las barras que produce la máquina *A*. Rango de *A* = ______

c) Calculen el rango de las longitudes de las barras que produce la máquina *B*. Rango de *B* = ______

d) Calculen la media de las longitudes de las barras que produce la máquina *A*. Media de *A* = ______

e) Calculen la media de las longitudes de las barras que produce la máquina *B*. Media de *B* = ______

f) Calculen la mediana de las longitudes de las barras que produce la máquina *A*. Mediana de *A* = ______

g) Calculen la mediana de las longitudes de las barras que produce la máquina *B*. Mediana de *B* = ______

h) ¿Qué máquina es más uniforme en la fabricación de las barras? La máquina ______ Justifiquen su respuesta ________________________________

Reto

Consigue las estaturas de los alumnos de un grupo y calcula la desviación media de las estaturas de todos los alumnos. Luego calcula, por separado, la desviación media para los hombres y para las mujeres. Si hay una diferencia grande, digamos, mayor al 50%, entre la de todo el grupo y uno de los géneros, explica por qué se da esta diferencia.

LECCIÓN 89

Diagramas de caja y bigotes

Cuartiles y diagramas de caja y bigotes

Para analizar un conjunto de datos se requiere saber varios de sus parámetros, es decir, los elementos que caracterizan al conjunto, por ejemplo los llamados de *tendencia central*, que hemos usado: la media, la mediana y la moda; también algunas medidas de dispersión, como lo son el rango y la desviación media; ahora veremos otro más.

I. Se tiene un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. La mediana M genera dos subconjuntos que tienen la misma cantidad de datos. El primero contiene los valores menores o iguales a M y el segundo contiene los mayores o iguales a M. Con esta información completa lo siguiente.

a) Al obtener la mediana, Q_1, del primer conjunto, éste a su vez queda dividido en dos conjuntos con la misma cantidad de datos, el primero contiene _____% de los datos del conjunto original y el segundo contiene el _____% restante, ya que entre los dos deben sumar _____%

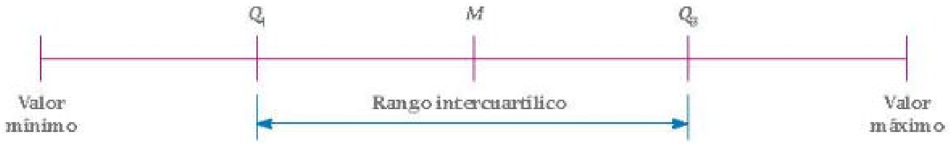
b) Ahora determina la mediana, Q_3, del segundo conjunto, que a su vez lo divide en _____ conjuntos, cada uno con _____% de los datos del conjunto original.

c) Así, los valores Q_1, M y Q_3 dividen al total de los datos originales en _____ conjuntos, cada uno con la __________ parte de ellos, por lo que reciben el nombre de **cuartiles**. Cabe aclarar que $M = Q_2$

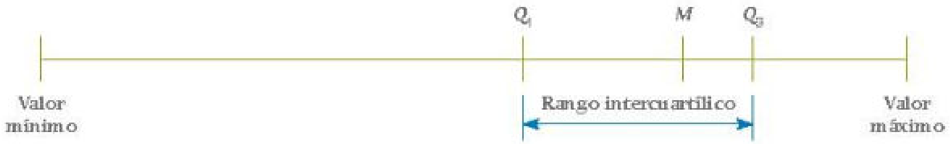
d) ¿Qué porcentaje de los datos se encuentra entre Q_1 y Q_3? _______%

La diferencia entre el primer y tercer cuartil se llama **rango intercuartílico**.

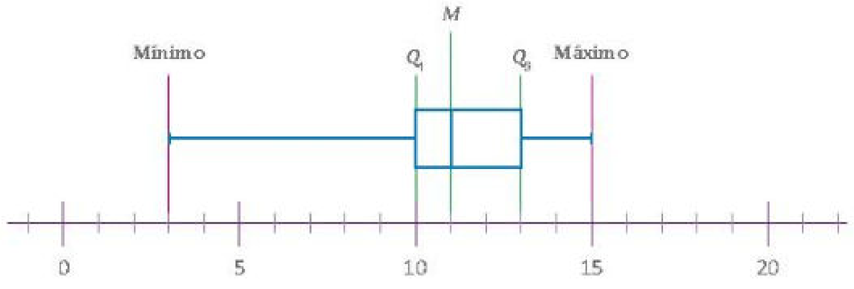
Cuando todos los datos están uniformemente repartidos, se puede ilustrar así:



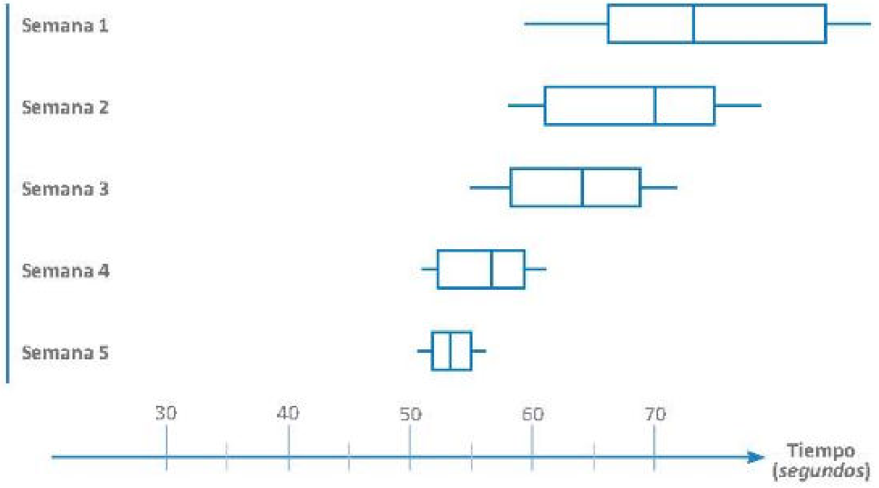
Sin embargo, en ocasiones los datos se cargan más hacia uno de los extremos y se concentran alrededor de un valor, como se muestra en el siguiente diagrama. Por eso nos interesa saber dónde están los cuartiles.



Precisamente cuando se tiene un diagrama asimétrico es cuando conviene elaborar el llamado **diagrama de caja y bigotes**, ya que describe visualmente las propiedades de dos o más conjuntos de datos. El largo de la caja mide lo mismo que el rango intercuartílico, su altura no importa, los lados de la caja coinciden con los cuartiles Q_1 y Q_3, la mediana queda dentro de la caja y los extremos de los brazos, o bigotes, coinciden con los valores máximo y mínimo. Por ejemplo, el diagrama de caja de un conjunto que tiene mínimo de 3, máximo de 15, $M = 11$, $Q_1 = 10$ y $Q_3 = 13$ es:



II. Un atleta entrena durante varias semanas para correr los 400 metros planos. Cada día, su entrenador toma el tiempo en que el atleta hace el recorrido, además de anotar los defectos a corregir al siguiente día. Después del entrenamiento, ambos revisan los diagramas de caja y bigotes de los tiempos que hizo el atleta semanalmente.



a) Según los diagramas de caja, ¿ha sido benéfico el entrenamiento? __________

b) ¿Qué pasa con la dispersión? __________

c) ¿Cuál es el menor tiempo que ha hecho el corredor? __________

III. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros equipos. ¿Coinciden? Si no, analicen por qué y corrijan.

Evaluación tipo Enlace

1. Encontrar la regla general de la sucesión cuyos primeros términos son 4, 7, 12, 19, 28,…

a) $4n^2 + 3$
b) $2n^2 + 2$
c) $n^2 + 3$
d) $5n^2 - 1$

2. Encontrar la regla general de la sucesión cuyos primeros términos son 10, 22, 42, 70, 106,…

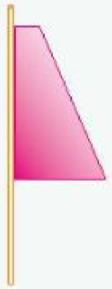
a) $7n^2 + 3$
b) $4n^2 + 6$
c) $12n^2 - 2$
d) $10n^2 - 1$

3. Encontrar el vigésimo término de la sucesión cuyos primeros términos son 5, 7, 11, 17, 25,…

a) 423
b) 401
c) 392
d) 385

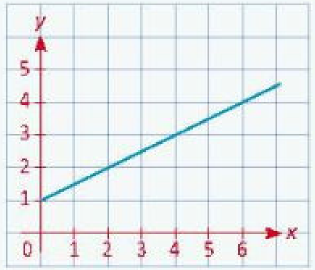
4. En la ilustración se muestra una figura geométrica pegada a un popote. Si se hace girar el popote, el sólido de revolución que generará es un

a) cilindro
b) cono truncado
c) trapecio
d) paralelepípedo



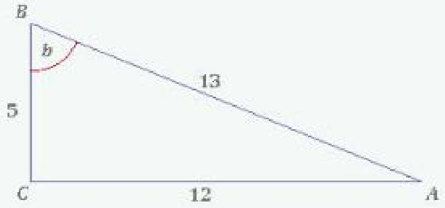
5. En la siguiente ilustración, ¿cuál es la pendiente de la recta?

a) 2
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{1}{2}$



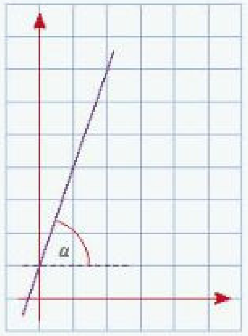
6. En el siguiente triángulo rectángulo, si $\cos b = \frac{5}{13}$, ¿cuál es el valor de sen b?

a) $\text{sen } b = \frac{5}{13}$
b) $\text{sen } b = \frac{13}{5}$
c) $\text{sen } b = \frac{12}{5}$
d) $\text{sen } b = \frac{12}{13}$



7. En la siguiente figura, ¿cuál es el valor de tan a?

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 1
d) 3



8. En el viaje escolar de fin de año, a las 9:25 de la mañana ya habíamos recorrido 75 km y a las 10:05 completamos 135 km de recorrido, llegando al sitio elegido para el paseo. ¿Cuál fue la razón de cambio, en $\frac{\text{km}}{\text{min}}$, para la distancia recorrida entre las 9:25 y las 10:05?

a) 30 **b)** 20
c) 10 **d)** 5

9. Se tiene una rampa cuyo ángulo de inclinación es de 45°, entonces la pendiente es 1 (es decir, la pendiente es $\tan 45° = 1$). Cuando uno asciende 2 metros por la rampa, los metros que ha recorrido horizontalmente son

a) 3 **b)** 2
c) 1.5 **d)** 1

10. En la ecuación $y = 2 - x$, la razón de cambio $\Delta y/\Delta x$ es

a) 2 **b)** –2
c) 1 **d)** –1

Evaluación tipo PISA

¡A llenar la cisterna!

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de litros que tiene una cisterna durante determinada hora del día en la que se está llenando.

Hora del día	1:30	1:40	1:50	2:00	2:10	2:20
Volumen (*litros*)	1 080	1 480	1 880	2 280	2 680	3 080

1. De la 1:40 a las 2:00, el valor del incremento del volumen (Δv, en litros) y el del incremento del tiempo (Δt en minutos) son, respectivamente:

a) 800, 20

b) 1 480, 100

c) 2 280, 120

d) 2 000, 50

2. Suponiendo que la rapidez con la que cae agua a la cisterna es constante, ¿cuál es el valor de ésta en litros por minuto? ____________

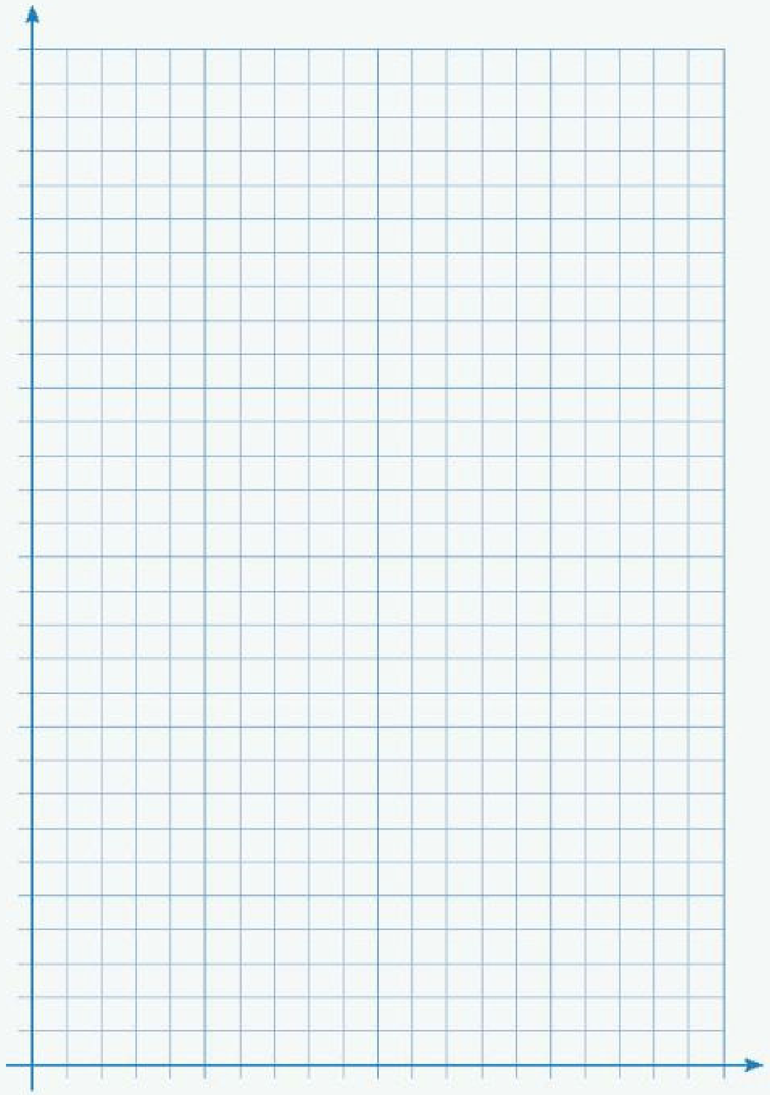
3. Relaciona los incrementos del volumen, Δv, con los respectivos incrementos del tiempo, Δt.

Δt (*minutos*)
10
30
60
25
2
27

Δv (*litros*)
1 200
2 400
400
80
1 000
1 080

4. Si la rapidez con la que cae agua a la cisterna es constante, y al principio estaba vacía, ¿a qué hora empezó a caer el agua? ____________

5. Suponiendo que la capacidad total de la cisterna es de 5 m^3, haz una gráfica que muestre el volumen de agua en función del tiempo, desde la hora en que comenzó a caer el agua hasta la hora en que se llenó.



La teoría de la probabilidad tiene una gran variedad de aplicaciones en muchas ciencias. Aunque su origen se remonta al siglo XVII e importantes matemáticos han contribuido al desarrollo y complejidad de su estructura matemática actual, el análisis de eventos tan sencillos como lanzar una moneda o un dado sigue siendo la manera más fácil de introducirse en su teoría y aplicaciones. Desde Pascal, Fermat y Bernoulli hasta llegar a von Neumann y Wiener, entre otros, la probabilidad ha evolucionado de las monedas y los dados hasta el movimiento browniano y la teoría de juegos, tan aplicable en la economía moderna.

Aprendizajes esperados:

- Resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

BLOQUE V

Contenidos

- Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.
- Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.
- Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.
- Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.
- Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
- Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

LECCIÓN 90

Distintos problemas, diferentes ecuaciones (1)

Según el problema es la ecuación

La resolución de un problema pasa por tres etapas. La primera es la comprensión completa del mismo, sus variables o datos, su incógnita y las relaciones entre ellos. La segunda es el planteamiento o traducción correcta de dichas relaciones al lenguaje algebraico y la tercera es la transformación válida de las expresiones algebraicas. En estas lecciones practicaremos la resolución de problemas de diferente grado de complejidad.

I. Un comerciante obtiene una ganancia de \$245 por la venta de tres artículos: a, b y c. La utilidad que obtiene en la venta de a es u, en la de b es $u - 15$ y en la de c es $2u - 40$. ¿Cuál es la utilidad obtenida en cada artículo?

Resolución

a) Lo primero que se debe hacer es expresar en lenguaje algebraico la afirmación "La suma de las tres utilidades es igual a 245". ________________

b) De la expresión anterior se despeja u y se obtiene la utilidad de a = ______

c) El valor de u se sustituye en $u - 15$ y se obtiene la utilidad de b = ______

d) El valor de u se sustituye en $2u - 40$ y se obtiene la utilidad por la venta de c = ______.

Comprueba si los resultados son correctos sustituyéndolos en la primera expresión algebraica.

II. En un día de trabajo, tres amigos, Héctor, Eduardo y Juan, ganaron \$600. Héctor ganó \$20 menos que Eduardo y Juan ganó el doble que Héctor. ¿Cuánto ganó cada quién?

Resolución

a) ¿A cuál de los tres amigos se debe tomar como base para designar los ingresos?

____

b) Una vez designados simbólicamente los ingresos de cada uno, la expresión algebraica que los relaciona es: ________________

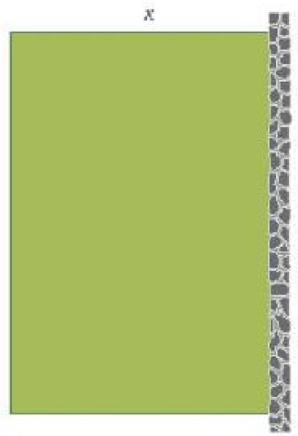
c) Ingreso de Héctor: ________________

d) Ingreso de Eduardo: ________________

e) Ingreso de Juan: ________________

Comprueben sus resultados sustituyéndolos en la suma de **b)**.

III. Un terreno rectangular situado junto a una barda tiene 200 m² de área y para cercar sus tres lados restantes se necesitaron 50 m de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?



Resolución

a) Si designan con x la longitud de los lados menores, la longitud del lado mayor es:

____

b) El producto de la longitud del lado menor por la del mayor es igual a:

____

c) La afirmación anterior expresada en términos algebraicos es:

____

d) Que al hacer las operaciones indicadas queda así:

____

e) Y al ordenar los términos e igualar a cero se tiene la ecuación cuadrática:

____

f) Cuya factorización es:

____

g) Por lo tanto, sus soluciones son:

x_1 = ______ y x_2 = ______

h) ¿Cuál de las soluciones es aplicable al problema? ________________

i) ¿Por qué la otra no es aplicable? ________________

Sustituyan en **a)** y **c)** la solución encontrada para comprobar que es la correcta.

IV. El producto de un número por la diferencia del mismo número menos 4 es 32. ¿Cuál es el número?

Resolución

a) Si designan al número buscado con n, entonces la expresión algebraica que describe el problema es:

n(____ - ____) = ______

b) Que al hacer las operaciones queda así:

______ - ______ = ______

c) E igualando a cero:

______ - ______ - ______ = 0

d) Se tiene una ecuación que se puede factorizar:

(____ - ____)(____ + ____) = 0

e) Por lo tanto, sus soluciones son

x_1 = ______ y x_2 = ______

Comprueben que las soluciones son correctas sustituyendo su valor en **a)**.

Distintos problemas, diferentes ecuaciones (2)

Redacción complicada y ecuación sencilla, ¿o viceversa?

La redacción de algunos problemas puede parecer un poco complicada, pero la ecuación que los describe puede ser muy simple y fácil de resolver. En otros problemas puede ocurrir lo contrario. Por ello es importante familiarizarse con toda clase de ellos y desarrollar la habilidad para traducirlos a lenguaje algebraico. Una vez expresados algebraicamente, las herramientas metodológicas entran en juego y es importante seleccionar la más adecuada para cada caso.

I. El triple de un número, menos 8, es igual al número más 12. ¿Cuál es el número?

a) Ecuación que describe el problema:

____

b) ¿De qué grado es la ecuación? ________________

c) ¿Cuántas variables tiene? ________________

d) ¿En cuántos pasos se resuelve la ecuación? ____________

e) El número buscado es ____________.

Comprueba tu resultado sustituyéndolo en la ecuación.

II. Expresen el siguiente problema con una ecuación.

Un padre tiene el cuádruple de la edad de su hijo. Dentro de 14 años, la edad del padre será el doble que la de su hijo.

Elijan una literal para representar la edad del hijo y encuentren la edad actual de ambos.

a) La ecuación es

____

b) ¿De qué grado es la ecuación que resuelve el problema? ________________

c) ¿Cuántas variables tiene la ecuación? ________________

d) ¿En cuántos pasos se resuelve la ecuación? ____________

e) La edad del padre es ____________ y la del hijo es ____________.

Sustituyan los valores encontrados en la ecuación para comprobar que son correctos.

III. En un examen de 120 preguntas, una respuesta correcta vale 2 puntos y una incorrecta disminuye un punto. Oscar contestó todas las preguntas y obtuvo una calificación de 75 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?

Si todas las preguntas fueron contestadas, la ecuación debe tener la forma de una resta o diferencia: puntos a favor menos puntos en contra es igual a __________

a) Si x representa el número de respuestas correctas, ¿cuántas fueron las incorrectas? ________________

b) Ecuación que describe el problema: ____________________________

c) Al resolver la ecuación se obtiene $x =$ ______

d) Las respuestas correctas le dieron a Oscar ______ puntos.

e) Las respuestas incorrectas fueron ______ y le restaron ______ puntos.

Si la diferencia de puntajes es igual a 75, eso comprueba que el valor de x encontrado es correcto.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y con el apoyo de su profesor, aclaren dudas y elijan a un equipo para que exponga a todo el grupo el procedimiento de resolución y la comprobación.

IV. Un problema de edades también puede resolverse con un sistema de ecuaciones lineales, si se usan literales distintas para simbolizar las edades de los personajes. Examinen y resuelvan el siguiente.

Dentro de 8 años, la edad de una madre será el doble de la que tendrá su hija, pero hace 3 años la edad de la madre era el triple de la que tenía su hija. Simbolicen con m la edad de la madre y con h la de la hija. ¿Cuántos años tienen ahora?

a) Ecuación que relaciona la edad de la madre con la de la hija dentro de 8 años:

____

b) Ecuación que describe la relación de sus edades hace 3 años: ____________

c) Al despejar m de una de las ecuaciones se obtiene $m =$ __________

d) El valor de m se sustituye en la otra ecuación para obtener $h =$ ______

e) El valor de h se sustituye en la ecuación del inciso c) para obtener el valor numérico de $m =$ ______

Los valores de m y h encontrados en **d)** y **e)** se sustituyen en la ecuación de **a)** para comprobar que son correctos.

V. Además de saber plantear un problema y traducirlo correctamente al lenguaje algebraico, es muy importante manejar las técnicas de éste de manera correcta y con soltura. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

a) Si aplicas la fórmula general, ¿lo haces al pie de la letra o primero calculas el discriminante para saber si tiene dos, una o ninguna solución?

____

b) Si la resuelves por factorización, ¿lo haces primero mentalmente y luego escribes o ambas cosas a la vez? ________________________

c) ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación? ________________

d) ¿Cuál(es) es(son) el(los) valor(es) de x? ________________

LECCIÓN 92

Ecuaciones y problemas

Dada una ecuación, formular un problema

Una vez que se ha practicado ampliamente la resolución de problemas planteando y resolviendo una o más ecuaciones, ahora invertimos el orden del proceso: a partir de una ecuación, plantear problemas.

I. Si se tiene la ecuación:

$$x + 2x = 12$$

¿Qué problemas pueden plantearse que se resuelvan con ella?

a) Supongan que x es un número entero.

¿Qué significa $x + 2x$? ______________

¿Qué significa $x + 2x = 12$? ______________

A partir de sus respuestas a las preguntas anteriores, redacten un problema que sea resuelto mediante la ecuación de arriba. ______________

____

b) Cambiemos el contexto del problema y ahora supongamos que x representa la edad de Luis y $2x$ es la edad de su hermano.

En este contexto, ¿qué significado tiene $x + 2x$? ______________

¿Qué significado tiene $x + 2x = 12$? ______________

Con base en esta información, redacten un problema que sea resuelto mediante la ecuación inicial. ______________

____

II. Si se tiene el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 24$$
$$2x + 4y = 64$$

¿Qué problemas pueden plantearse que se resuelvan con el sistema?

a) Supongan que x y y son números.

¿Qué significa $x + y$? ______________

¿Qué significa $x + y = 24$? ______________

¿Qué significado tiene $2x + 4y = 64$? ______________

A partir de sus respuestas a las preguntas anteriores, redacten un problema que sea resuelto mediante el sistema de ecuaciones inicial. ______________

____

b) Cambiemos el contexto del problema y ahora supongamos que x es un número determinado de escritorios con 2 cajones y y es un número determinado de escritorios con 4 cajones.

En este contexto, ¿qué significado tiene $x + y$? ______________

¿Qué significado tiene $x + y = 24$? ______________

¿Qué significan $2x$ y $4y$? ______________

¿Qué significado tiene $2x + 4y = 64$? ______________

Con base en esta información, redacten un problema que sea resuelto mediante el sistema de ecuaciones inicial. ______________

____

III. Si se tiene la ecuación:

$$x(x - 5) = 300$$

¿Qué problemas pueden plantearse que se resuelvan con ella?

a) Supongan que x es un número entero.

¿Qué significan x y $x - 5$? ______________

¿Qué significa $x(x - 5)$? ______________

¿Qué significa $x(x - 5) = 300$? ______________

A partir de sus respuestas a las preguntas anteriores, redacten un problema que sea resuelto utilizando la ecuación inicial. ______________

____

b) Supongamos que x representa la medida del lado largo de un terreno rectangular.

¿Qué representa $x - 5$? ______________

¿Qué representa $4x - 10$? ______________

¿Qué representa $x(x - 5)$? ______________

¿Qué significa $x(x - 5) = 300$? ______________

Redacten un problema a partir de las respuestas a las preguntas anteriores, de manera que se resuelva con la ecuación inicial. ______________

____

IV. En una hoja suelta escriban dos ecuaciones cuadráticas sencillas. Intercambien su hoja con otra pareja de compañeros e inventen problemas que se resuelvan con las ecuaciones que les pasaron. Cuando terminen, recuperen su hoja y revisen que los problemas planteados realmente se resuelvan con sus ecuaciones.

Con la coordinación de su profesor, pueden hacer este ejercicio por equipos y al terminar, exponer a todo el grupo los problemas que además de comprobar que se resuelven con la ecuación planteada, sean más imaginativos o ingeniosos.

LECCIÓN 93

Cortes a un cilindro y a un cono

Secciones que se obtienen al cortarlos con un plano

I. Vacíen agua coloreada en un vaso cilíndrico transparente.

a) Si colocan la base del cilindro en posición horizontal, ¿qué forma tiene la superficie libre del agua? ______

b) Si inclinan un poco el cilindro, la superficie libre del agua tiene la forma de una **elipse**. ¿Qué hacen para que la elipse sea mayor? ______

c) Si colocan el cilindro con agua de manera que su generatriz esté en posición horizontal, ¿qué forma tiene la superficie libre del agua? ______

d) Si desean que la superficie libre del agua forme un rectángulo de menor área, ¿qué deben hacer? ______

e) ¿En qué caso la superficie libre del agua determina el rectángulo de mayor área? ______

a)

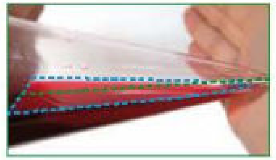

b)


c)


a)


b)


c)


d)


II. Vacíen agua coloreada en un cono transparente.

a) Si colocan la base del cono en posición horizontal, ¿qué forma tiene la superficie libre del agua? ______

b) Si inclinan un poco el cono, ¿qué forma tiene la superficie libre del agua? ______

c) Si colocan el cono de manera que la superficie libre del líquido sea paralela a la generatriz del cono, se forma una **parábola**. ¿Qué pueden hacer para que la parábola sea menor? ______

d) Si colocan el cono de manera que la superficie libre del agua sea paralela al eje del cono (perpendicular a su base), se forma un caso particular de **hipérbola**. ¿Qué figura se genera si la superficie libre del agua es paralela al eje del cono y coincide con su vértice? ______

III. Supongan que pudieran vaciar agua dentro de una esfera transparente.

a) ¿Qué forma tendría la superficie libre del agua dentro de la esfera? ______

b) Si inclinaran hacia un lado la esfera, ¿qué forma tendría la superficie libre del agua? ______

c) Si desearan que el círculo que se forma en la superficie libre del agua fuera el de mayor área, ¿qué deberían hacer? ______

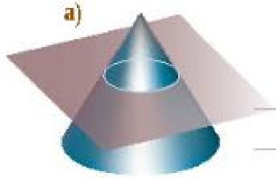
IV. Consideren la ilustración del pastel de la derecha.

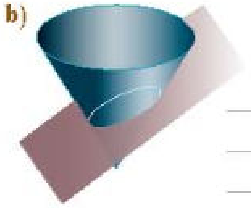
a) Visto como cuerpo geométrico, ¿qué forma tiene? ______

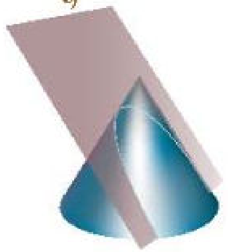
b) Si se corta verticalmente el pastel, coincidiendo el corte con su eje, ¿qué forma tiene esa sección transversal? ______

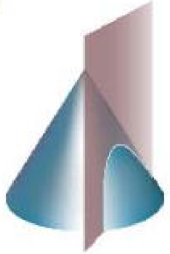
c) Si se hace un corte paralelo al primero, ¿qué relación tiene esa sección transversal respecto del primer corte? ______

V. Al cortar un cono mediante un plano, que no pase por su vértice, se obtienen diferentes secciones. Anoten el nombre de cada sección y la posición del plano respecto de la base del cono.

a)

______

b)

______

c)

______

d)

______

VI. Construyan un cono con plastilina. Hagan cada vez un corte para obtener una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola. Verifiquen que los cortes tengan las características requeridas para generar las secciones correspondientes.

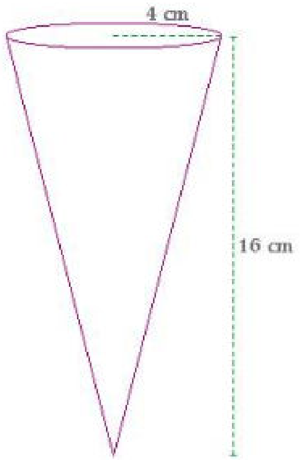
> Las secciones que se obtienen al cortar un cono mediante un plano se llaman *cónicas*. Las cónicas son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

VII. Comenten sus respuestas a las actividades de esta lección con otros equipos del grupo y, con ayuda de su maestro, obtengan conclusiones generales.

LECCIÓN 94

Varios círculos en un cono

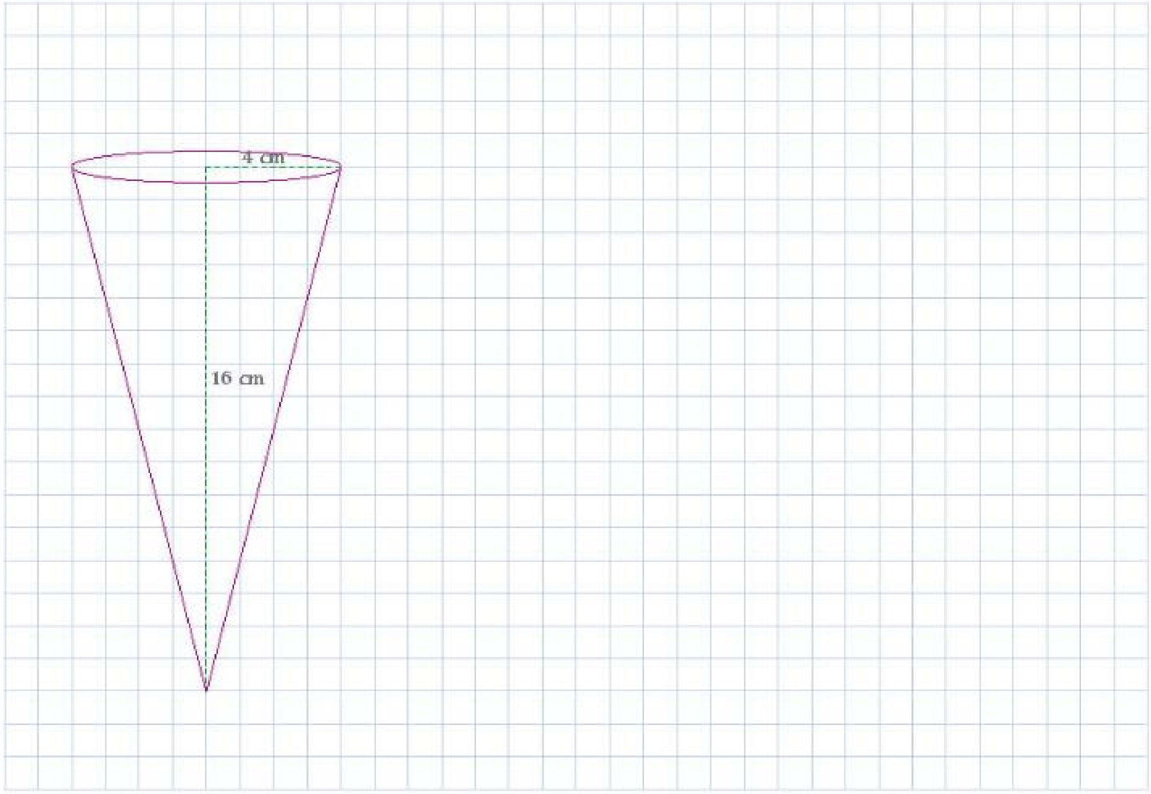
Cálculo del radio de los círculos paralelos a la base de un cono



I. Felipe es diseñador industrial y tiene el encargo de diseñar, para empacar regalos, conos semejantes al de la derecha, cuya base mide 4 cm de radio y tiene una altura de 16 cm. Lo primero que se plantea el diseñador es si existe una relación entre la altura de cada cono y el radio de su base, conservando la semejanza entre los conos.

a) Antes de continuar con el desarrollo de esta actividad, discutan entre los miembros del equipo si existe una relación entre la altura del cono y el radio de la base. Pueden proponer una conjetura sobre esta relación y verificarla o desecharla, analizando casos particulares.

b) Para analizar la relación entre la altura del cono y el radio de la base, Felipe se plantea, a partir del cono de 16 cm de altura y 4 cm de radio, trazar en papel cuadriculado conos similares de 16 cm, 12 cm, 8 cm y 4 cm de altura, respectivamente. Tracen en la siguiente cuadrícula los conos que faltan.



c) Con base en las medidas de los cuatro conos, Felipe concentró esa información en la tabla de la derecha. Completen la tabla.

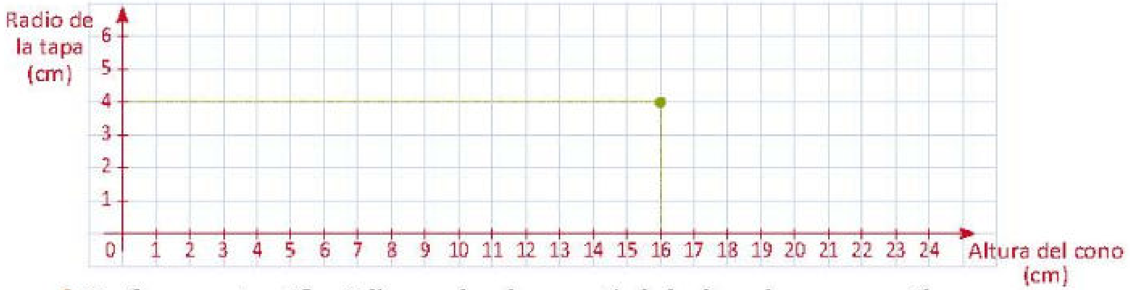
Altura del cono	Radio de la base
16 cm	4 cm

d) De acuerdo con esta tabla, ¿son proporcionales las altura y el radio de la base? _____ Justifiquen su respuesta.

____

____

e) Con los datos de esta tabla, Felipe construyó la siguiente gráfica. Terminen de localizar los puntos y únanlos con trazo continuo.



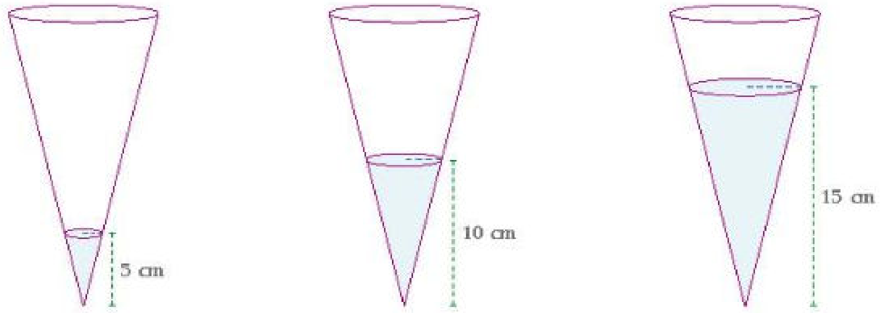
f) Conforme a esta gráfica, Felipe puede saber, a partir de la altura de un cono, cuál es el radio de la base de cualquier cono. Para ello, completen la siguiente tabla.

Altura del cono (cm)	Radio de la base (cm)
0	
2	
4	
6	
8	

Altura del cono (cm)	Radio de la base (cm)
10	
12	
14	
16	
18	

Altura del cono (cm)	Radio de la base (cm)
20	
22	
24	

II. Los siguientes conos miden 20 cm de altura y 5 cm de radio en su base, en cada caso se da la altura del nivel del agua. Anoten cuál es el radio de la superficie libre del agua.



r = _______ r = _______ r = _______

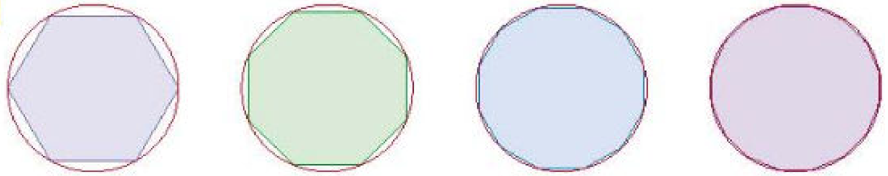
III. Comparen sus respuestas de esta lección con otras parejas. Si no coinciden, analicen por qué y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 95

Volumen de un cilindro

A partir de la fórmula para un prisma, obtenemos la del cilindro

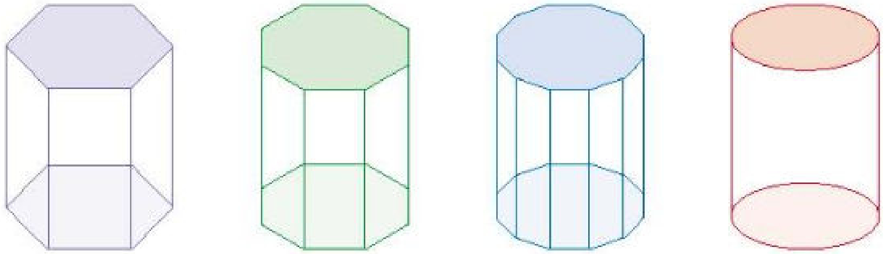
I. Las siguientes figuras muestran polígonos regulares inscritos en un círculo del mismo radio.



Hexágono · Octágono · Dodecágono · 16-ágono

a) A medida que aumenta el número de lados, el polígono se acerca más a ________________

b) De manera parecida, imaginemos que el número de lados de la base de un prisma poligonal aumenta.



Prisma hexagonal · Prisma octagonal · Prisma dodecagonal

c) Conforme aumenta el número de lados de la base, el prisma poligonal se parece más a ____________

d) ¿Qué diferencia hay entre un prisma y un cilindro? ____________________

____

II. Para calcular el volumen de un prisma se usa la fórmula

$$V = B \times h$$

B: área de la base
h: altura del prisma

a) De igual manera, para calcular el volumen de un cilindro se usa la fórmula

$V =$ ________ B: ________

h: ________

Justifiquen su respuesta. __________________________________

____

b) La base de un cilindro es un círculo, por lo tanto, la fórmula para calcular el volumen de un cilindro es

$V =$ ________

III. Completen y comenten la siguiente información con todo el grupo.

Para calcular el volumen de un cilindro se usa la fórmula

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es ________________ del cilindro y h ____________.

IV. ¿El volumen de un cilindro es proporcional a su altura?

Para responder a esta pregunta usen la fórmula para calcular el volumen de un cilindro y hagan lo siguiente:

a) Dupliquen la altura del cilindro y vean qué ocurre con el volumen. __________

b) Dividan entre dos la altura del cilindro y vean qué efecto tiene en el volumen. __________

c) Conforme a las respuestas en **a)** y **b)**, ¿el volumen de un cilindro y su altura son proporcionales? ______ Justifiquen su respuesta. ____________________

____

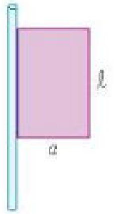
V. ¿El volumen de un cilindro es proporcional a su radio?

Para responder a esta cuestión, propongan preguntas como las de **a)**, **b)** y **c)** de la actividad **IV**.

VI. Hacemos girar en torno a un popote un rectángulo de largo ℓ y ancho a.

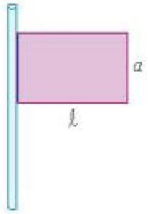
a) Escriban la expresión que determina el volumen del cuerpo geométrico que se genera si el rectángulo está pegado al popote por el lado ℓ.

____



b) Escriban la expresión que determina el volumen del cuerpo geométrico que se genera si el rectángulo está pegado al popote por el lado a.

____



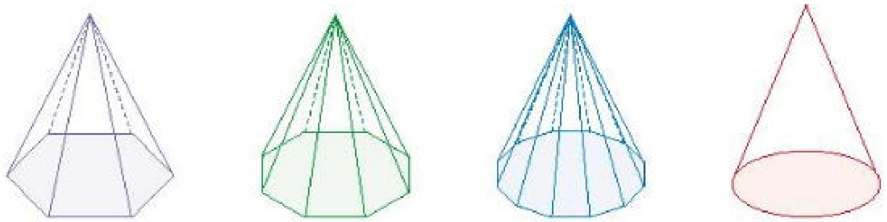
VII. Comparen sus respuestas de esta lección. Si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 96

Cálculo del volumen de un cono

Con base en la fórmula la pirámide, obtenemos la del cono

I. Como en el caso de los cilindros, imaginen que el número de lados de la base de una pirámide aumenta.



Pirámide hexagonal — Pirámide octagonal — Pirámide dodecagonal

a) A medida que aumenta el número de lados de la base, la pirámide poligonal se parece a ____________

b) ¿Qué diferencia hay entre una pirámide y un cono? ____________

____

II. Tomemos como referencia la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.

a) Para calcular el volumen de una pirámide se usa la fórmula

____

Las literales que intervienen en esta fórmula significan ____________

____

b) De la misma manera que en el caso de una pirámide, para calcular el volumen de un cono se usa la fórmula

____

donde r representa ____________

c) En esta fórmula, si en lugar de B (base) escribimos πr^2, la fórmula para calcular el volumen de un cono nos queda de la siguiente manera:

____

III. Comenten la siguiente información entre todo el grupo (completar):

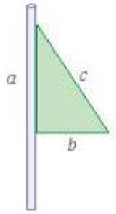
Para calcular el volumen de un cono, se usa la siguiente fórmula:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

donde r es ____________ del cono y h ____________.

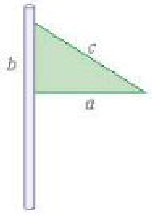
III. Se hace girar un triángulo rectángulo de catetos a y b en torno a un popote.

a) Escriban la expresión que permite calcular el volumen del cuerpo geométrico que se genera, si el triángulo rectángulo se pega al popote por su lado a.



____

b) Escriban la expresión que permite calcular el volumen del cuerpo geométrico que se general, si el triángulo rectángulo se pega al popote por el lado b.



____

IV. El cilindro y el cono de la fotografía de la derecha tienen la misma altura y el mismo radio en sus bases. El cono está completamente lleno de agua coloreada.

Anoten frente a cada una de las siguientes fotografías lo que les sugiere cada una.

____

____

____

____

____

____

VII. Contrasten sus respuestas a las actividades de esta lección con otras parejas de compañeros. Si no coinciden, revisen el porqué y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 97

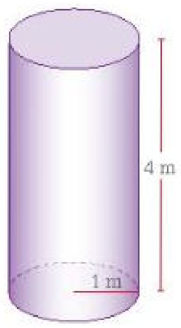
Volumen de cilindros y conos (1)

Estimación y cálculo con fórmulas

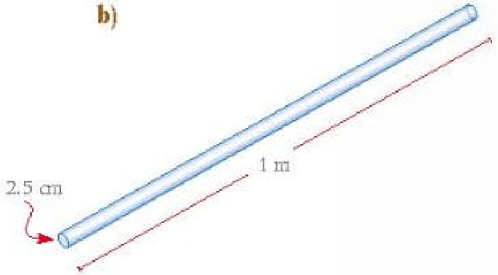
Antes de resolver los siguientes problemas haciendo operaciones, estimen el resultado. Después hagan las operaciones correspondientes y compárenlo con su estimación. Si su estimación estuvo lejos, analicen por qué. Si la estimación de algunos compañeros estuvo cerca, pídanles que compartan su estrategia con el resto del grupo.

I. Estimen y calculen el volumen de los siguientes cuerpos. Al hacer su estimación pueden, por ejemplo, darle a π el valor de 3.

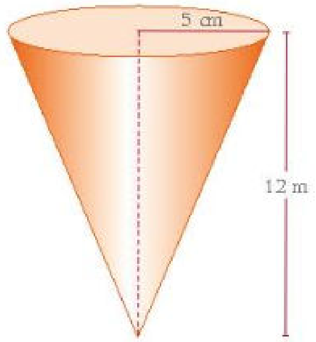
a)



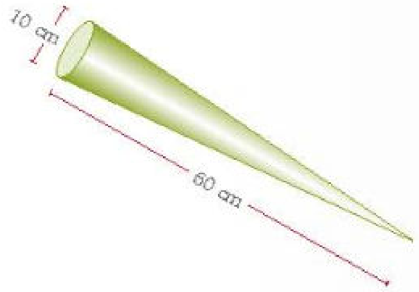
b)



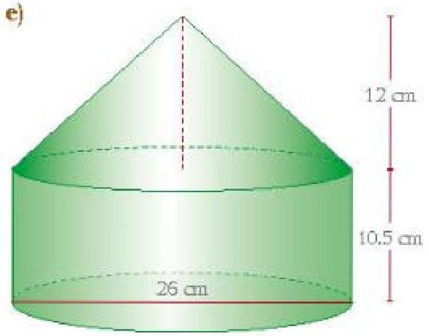
c)



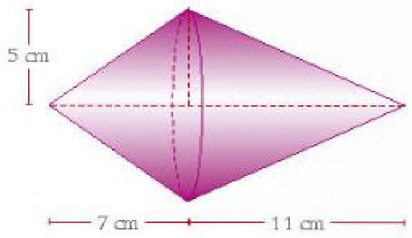
d)



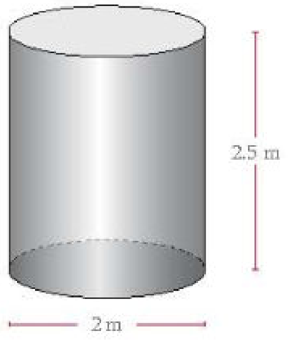
e)



f)



II. Los siguientes problemas se refieren al cilindro de la derecha.



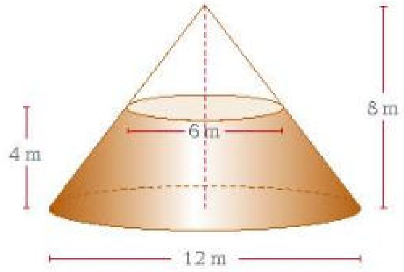
a) Este tinaco cilíndrico tiene 2 m de diámetro en su base y 2.5 m de altura. ¿Cuál es su volumen?

b) ¿Cuál sería la altura de un cono que tuviera el mismo volumen y la misma base que este tinaco?

c) Si al mismo tinaco cilíndrico se le aumentara 20% a su altura, ¿en qué proporción aumentaría su volumen?

d) Si al mismo tinaco se le aumentara 20% al diámetro de su base, ¿cuál sería su volumen?

III. Un silo es una construcción que se usa para almacenar granos y cereales y puede tener la forma de un cono. La figura de la derecha representa un silo cónico de 12 m de diámetro y 8 m de altura.



a) Calculen el volumen del silo.

b) Si el silo contiene grano hasta una altura de 4 m, calculen el volumen del grano almacenado.

c) Calculen el volumen que aún queda vacío en el silo.

IV. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros equipos de compañeros. Si no coinciden, expongan sus razones y con ayuda de su profesor corrijan lo necesario.

Volumen de cilindros y conos (2)

Cálculo del radio de la base y la altura

I. De la fórmula para calcular el volumen de un cilindro:

$$V = \pi r^2 h,$$

despejen r y h.

$r =$ ________

$h =$ ________

II. De la fórmula para calcular el volumen de un cono:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

despejen r y h.

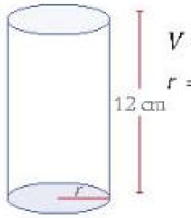
$r =$ ________

$h =$ ________

III. Completen la siguiente tabla.

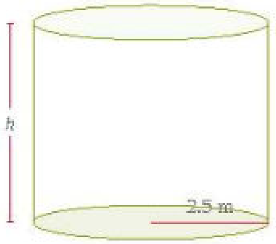
Cuerpo geométrico	Radio de la base	Altura	Volumen
Cilindro	6 cm	20 cm	
Cilindro	4 cm		112 cm³
Cilindro		36 cm	424 cm³
Cono	10 cm	72 cm	
Cono	5 cm		620 cm³
Cono	2 cm		90 cm³

IV. Calculen la medida que falta en los siguientes cilindros:



$V = 400\ \text{cm}^3$

$r =$ ________



$V = 160\ \text{cm}^3$

$h =$ ________

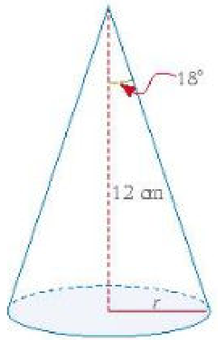
V. Calculen la medida que falta en los siguientes conos:

a) Un cono tiene 20 m² de área en su base y un volumen de 160 m³. Encuentren su altura.

b) ¿Cuál debe ser la altura de un cono, si se desea que el radio de su base mida 2 cm y tenga un volumen de 80 cm³?

c) Un cono tiene 16 cm de altura y 160 cm³ de volumen. Calculen el radio de su base.

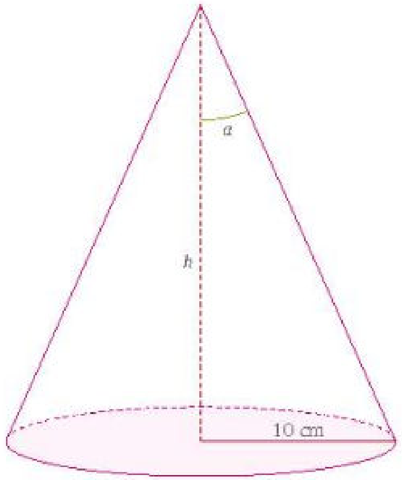
VI. Calculen la medida del radio r y el volumen V del siguiente cono.



$r =$ ________

$V =$ ________

VII. Calculen el ángulo a, la altura h y el volumen V del siguiente cono.



$\angle a =$ ________

$h =$ ________

$V =$ ________

VIII. En épocas pasadas se usaban cilindros para medir granos, en los que su altura debía medir el doble que el diámetro de su base. De acuerdo a esta regla, calculen el radio de la base y la altura de un cilindro para medir un litro.

IX. Entre todo el grupo comparen las respuestas de los diferentes equipos. Si no coinciden, expongan las razones y con ayuda de su maestro corrijan lo necesario.

LECCIÓN 99

Funciones lineales y cuadráticas en distintos contextos (1)

La herramienta adecuada produce el resultado correcto

En la naturaleza y en la actividad humana existe una enorme variedad de fenómenos y situaciones que requieren analizarse, explicarse, preverse, plantearse y resolverse con ecuaciones. Entonces, dos aspectos de gran importancia son: familiarizarse con todo tipo de ecuaciones y las técnicas para resolverlas, y plantear correctamente la ecuación que corresponde a una situación real expresada en lenguaje natural.

I. El valor total de n billetes de \$100, $3n$ billetes de \$50 y $7n$ billetes de \$20 es \$5 850.

a) ¿Cuántos billetes hay en total? ________

b) ¿Cuántos billetes hay de \$100? ________

c) ¿Cuántos billetes hay de \$50? ________

d) ¿Cuántos billetes hay de \$20? ________

Comprueba tus resultados.

El problema se resolvió planteando una ecuación ________________

II. La entrada a un parque de diversiones cuesta \$50 por adulto y \$25 por niño. En un día entraron 300 personas y pagaron en total \$12 250. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron al parque?

a) Si designamos a los adultos con a y a los niños con n, se tiene

$$\_\_\_\_\_\_ a + \_\_\_\_\_\_ n = 12\,250$$

b) Además, se sabe que ________ + ________ = 300

c) El número de niños es $n =$ ________

d) El número de adultos es $a =$ ________

e) El pago total por los niños fue: ________

f) El pago total por los adultos fue: ________

Comprueben sus resultados.

El problema se resolvió planteando ________________

III. Un técnico en computación instala un negocio de reparación de computadoras y asesoría en cómputo. Después de hacer cálculos, estima que el costo mensual por mantener el negocio se describe con la ecuación

$$y = 20x + 5\,000$$

donde x es el número de clientes. También concluye que sus ingresos mensuales se representan con la ecuación

$$y = 65x - 1\,700$$

¿Cuántos clientes necesita para salir a mano?

¿Cuánto ganaría si tuviera 250 clientes?

a) Salir a mano significa que los ingresos son iguales a los gastos, por lo tanto, se deben ________ las ecuaciones.

____

b) Al despejar x de la igualdad anterior se obtiene que el número de clientes necesario para salir a mano es ________, redondeado al siguiente entero.

c) Para contestar la segunda pregunta se sustituye x por 250 en la ecuación de los ingresos y se obtiene: ________________

d) ¿Cómo comprueban si sus resultados son correctos?

e) El problema se resolvió planteando ________________

IV. En un deportivo se están jugando 13 partidos de tenis por 38 personas. Algunos partidos son individuales, jugados por dos personas; otros son dobles, jugados por cuatro personas.

a) ¿Cuántos partidos individuales se están jugando? ________________

b) ¿Cuántos partidos dobles se están jugando? ________________

c) El problema se resuelve planteando ________________

Resolución

Comprueben sus resultados y compárenlos con los de otros equipos.

V. En el lanzamiento de jabalina, la altura de ésta se describe con la ecuación

$$h(t) = -16t^2 + 79t + 5$$

Donde t es el tiempo en segundos que transcurre desde que se lanza la jabalina hasta que llega al suelo.

a) ¿Cuál es el valor de la altura cuando la jabalina toca el suelo? ________

b) ¿Qué se debe hacer para calcular el tiempo que la jabalina está en el aire?

____

c) ¿Qué método empleas para resolver la ecuación? ________________

Resolución

d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ________ y ________

e) ¿Cuál solución debe desecharse y por qué? ________________

____

Compara tu resultado con el de otros compañeros y con el apoyo de su profesor, aclaren las dudas sobre el procedimiento y su resultado.

Funciones lineales y cuadráticas en distintos contextos (2)

Recursos versátiles para situaciones diversas

En esta lección continúa la práctica de traducir y plantear la ecuación o ecuaciones necesarias para resolver problemas de diferente tipo, así como los métodos para hacerlo. Es muy deseable trabajarlos de manera independiente y sólo recurrir al esquema mostrado aquí para aclarar dudas o comparar procedimientos y resultados.

I. Dos ciclistas, A y B, están separados por 300 km y se dirigen el uno hacia el otro, arrancando al mismo tiempo. La velocidad de A es 27 km/h y la de B es 33 km/h. Calcula el tiempo que tardan en encontrarse.

a) Representa el tiempo con t. De acuerdo a las condiciones del problema, ¿supones que el tiempo será igual para ambos? ________ Explica ________

____

b) Las velocidades a las que se desplazan son ____________, por lo tanto, las distancias que uno y otro recorren son ____________

c) La suma de las distancias que recorren es ____________

d) La distancia recorrida por A es ____________

e) La distancia que recorre B es ____________

f) La ecuación que resuelve el problema es:

____

g) Al resolver la ecuación se obtiene t = ________

h) Para comprobar si el valor de t que obtuviste es correcto, calcula la distancia que recorrió A: ____________ y la que recorrió B: ____________

i) La suma de las respuestas al inciso **h)** debe ser igual a ____________

II. Dos aviones parten del mismo aeropuerto a la misma hora, en direcciones opuestas. La velocidad de uno es 300 km/h mayor que la del otro. Después de 4 horas de vuelo, se encuentran a 5 000 km de distancia. Calculen la velocidad de los aviones.

a) Si representan con v_l la velocidad del avión lento y con v_r la del avión más rápido, entonces la relación entre ambas velocidades es ________________

b) La distancia que recorre el avión lento es ____________

c) La distancia que recorre el avión rápido es ____________

d) La ecuación que relaciona ambas distancias con la distancia que separa a los aviones después de 4 horas de vuelo es:

____

e) Al resolver la ecuación se obtiene v_l = __________ y v_r = __________

f) De acuerdo a estos valores, la distancia que recorrió el avión lento es __________ y la distancia recorrida por el avión rápido es __________

g) Las velocidades que calcularon son correctas si la suma de las distancias recorridas por los aviones es igual a ____________

III. El dueño de un edificio de 70 departamentos puede alquilarlos todos si los renta en \$4 000 mensuales. Por cada aumento de \$100 en la renta, un departamento se queda vacío. ¿Cuál debe ser el costo del alquiler por departamento para tener un ingreso total de \$297 600?

a) Si designan con n el número de aumentos de \$100, entonces el nuevo costo del alquiler por departamento es de ____________

b) Si el alquiler se incrementa en n veces \$100, ¿cuántos departamentos quedan vacíos? __________

c) De acuerdo a la respuesta anterior, el número de departamentos alquilados es entonces __________

d) El ingreso total es igual al costo del alquiler señalado en **a)**, multiplicado por el número de departamentos alquilados, obtenido en **c)**:

(__________) × (__________) = 297 600

e) En el primer factor de la expresión anterior se puede extraer 100 como factor común y queda así:

100(________) × (________) = 297 600

f) Ahora dividan ambos miembros de la igualdad por 100 y tendrán cantidades más fáciles de manejar:

(________) × (________) = 2 976

g) Efectúen el producto, agrupen y reordenen términos e igualen a cero:

____

h) Si el término de mayor exponente quedó con signo negativo, multipliquen todo por −1

____

i) La ecuación final en **h)** se puede resolver con la fórmula general o por factorización. En cualquier caso, las soluciones son:

n_1 = ________ y n_2 = ________

Comprobación

a) ¿Cuál es la renta por departamento en el caso de n_1? __________

b) ¿Cuántos departamentos quedan alquilados en el caso de n_1? __________

c) ¿Qué ingreso producen? __________

d) ¿Cuál es la renta por departamento en el caso de n_2? __________

e) ¿Cuántos departamentos quedan alquilados en el caso de n_2? __________

f) ¿Qué ingreso producen? __________

g) ¿Ambos ingresos son iguales al ingreso total deseado en el planteamiento del problema? __________

IV. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros equipos. Si no coinciden, expongan sus razones y, con la ayuda de su profesor, corrijan lo necesario.

Juego justo (1)

Chicos y grandes

Ya hemos visto que, aunque la probabilidad tuvo su inicio con el análisis de los juegos de azar, tiene un sinnúmero de aplicaciones en casi todas las áreas del conocimiento humano, pero siempre bajo el manto del azar. Una de las aplicaciones donde se manifiesta claramente el carácter de una apuesta está en los seguros. Cuando un cliente compra un seguro de vida está haciendo un contrato para jugar mensualmente una apuesta con la compañía de seguros: "El cliente gana la apuesta si se muere durante el mes (aunque la cobran los deudos) y paga si la pierde, es decir, si no murió. No se requiere saber mucho para afirmar que es más probable que muera pronto un anciano de 80 años que una niña de cinco. Sin embargo, los matemáticos, al trabajar con los datos de los censos, pueden medir esa probabilidad y asignar cuotas a los seguros de vida para que la apuesta sea justa. Así, costará menos asegurar a un pequeño que a un anciano.

Durante estas lecciones examinaremos si un juego de azar es justo o si no lo es, exclusivamente desde la óptica de analizar si los dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.

I. En muchas ferias de barrio y de pueblo se ponen apostadores con un juego llamado *Chicos y grandes*. Se trata de un tapete con tres zonas donde se colocan las apuestas. Una primera zona llamada *Chicos* con los números 2, 3, 4, 5 y 6; otra zona más, llamada *Grandes* con los números 8, 9, 10, 11 y 12; entre estas dos zonas está otra más con el número 7. El juego consiste en tirar dos dados y, según lo que salga, el jugador gana una cantidad igual a la que apostó si la suma de los dados fue uno de los números de la zona en los que colocó su apuesta, de lo contrario, él pierde y la casa gana, es decir, gana el dueño del negocio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ganes si apuestas a *Chicos*? ____________
¿Y cuál es la probabilidad de que pierdas? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ganes si apuestas a *Grandes*? ____________
¿Y cuál es la probabilidad de que pierdas? ____________

c) Si apuestas a 7, ¿cuál es la probabilidad de que ganes? ____________
¿Y cuál es la probabilidad de que pierdas? ____________

d) ¿Consideras que el juego es justo? ________ Justifica tu respuesta ____________

____

II. Ahora, decides apostar un peso a *chicos* y un peso a *grandes* al mismo tiempo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no pierdas los dos pesos? ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ganes algo? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que pierdas? ____________

III. Juan, Saúl y Esperanza apuestan un peso cada quien y cada uno lo hace en una zona distinta: Juan lo pone en la de los *Grandes*, Saúl va por el 7 y a Esperanza le gustan los *Chicos*.

a) ¿Cuánto va a ganar la casa? ____________

b) Si Juan, Saúl y Esperanza continúan jugando de la misma manera durante 96 juegos, ¿podría ocurrir que al final tanto Saúl como Esperanza ganaran cada quien 70 pesos? ______ Justifiquen su respuesta. ____________

____

c) Después de los 96 juegos, ¿cada uno de los tres podría salir ganando algo? ______ Justifiquen su respuesta. ____________

____

IV. Por lo visto, lo mejor sería que Juan, Saúl y Esperanza no jugaran, ya que el juego es injusto a todas luces. Pero si ellos insisten en apostar algo, podríamos recomendarles jugar *piedra, papel o tijera*; o *disparejos*. En los disparejos, cada quien lanza una moneda y si las tres monedas caen iguales, se hace otro lanzamiento, de lo contrario gana la persona cuya moneda haya salido diferente de las otras dos, que caerán iguales entre sí y éstos pierden.

a) En el juego del *disparejo*, ¿cuál es la probabilidad de que gane Juan? ______
¿Cuál es la probabilidad de que gane Saúl? ______ ¿Cuál es la probabilidad de que gane Esperanza? ______

b) ¿El juego es justo? ______ ¿Por qué? ____________

c) Cada uno tiene una posibilidad de ganar, contra ______ posibilidades de perder. Parecería injusto, pero los tres están en la misma situación y, además, se compensa exactamente con la ganancia que se obtiene: pierdes uno o ganas dos.

V. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros equipos. Si no coinciden, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

Reto

Para que el juego de *Chicos y grandes* fuera justo, por cada peso, ¿cuánto debería pagar la casa a quien apueste a *Chicos*?, ¿cuánto debería pagar la casa a quien apueste a *Grandes*?, ¿cuánto debería pagar la casa a quien apueste a 7?

Juego justo (2)

Los *volados*

¿Acaso hay un juego de azar más justo y diáfano que un *volado*? Seguramente todos pensamos que no. Sin embargo, ¿qué pasa si la moneda está cargada hacia una de las caras? Muchos creeríamos que ya no sería posible realizar un juego justo con ella, más aún si no se sabe hacia dónde está cargada. Quién sabe, dirá otro, "si ninguno de los jugadores sabe cuál es la cara que tiene la ventaja, ambos estarán en las mismas condiciones, no hay problema, es justo". Y si uno de ellos sí sabe, ¿cómo es posible hacer con ella un juego justo?

I. Norma y Bernardo quieren lanzar una moneda para jugar una apuesta. Ambos saben que la moneda está cargada, de tal manera que la probabilidad de caer *águila* es el doble que la de caer *sol*.

a) Supongamos que Norma pide *sol* y apuesta un peso. Obviamente, ella pierde su dinero si la moneda cae *águila*. Pero para que el juego sea justo, ¿cuánto debe pagarle Bernardo si ella gana? ________

b) Ahora, supongamos que Norma pide *águila* y apuesta un peso. Si ella gana, ¿cuánto debe pagarle Bernardo para que el juego sea justo? ________

II. Una forma de equilibrar el defecto o exceso de probabilidad es asignar los montos de la apuesta según se gane o se pierda. Sin embargo, con una moneda cargada, como en la actividad anterior, cómo habrá que hacerle si no se pueden asignar montos a las apuestas. Por ejemplo, si Norma y Bernardo sólo tienen un boleto para "El concierto del siglo" de su artista favorito y deciden dirimir el asunto usando la misma moneda cargada de la actividad anterior.

a) Para lograr que el juego sea justo, deciden lanzar dos veces la moneda, uno pide (A, S) y el otro ______

b) ¿Qué deben hacer si la moneda cae (A, A) o (S, S)? ________________

c) Si se lanza una moneda dos veces, esté o no cargada, ¿lo que sale en el primer lanzamiento influye en lo que sale en el segundo? ______, porque son eventos ________________

d) Al lanzar esa moneda cargada dos veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos *águilas* (A, A)? ________

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos *soles* (S, S)? ________

f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *águila* y después *sol* (A, S)? ______

g) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *sol* y después *águila* (S, A)? ______

h) ¿Cuáles de los eventos anteriores son equiprobables? ________ y ________

III. Al lanzar dos veces esa moneda, puede ocurrir que en los dos lanzamientos caiga la misma cara, con lo cual quedan empatados y deben volver a lanzarla dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se decida en dos lanzamientos? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se decida en cuatro lanzamientos? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se decida en seis lanzamientos? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se decida a lo más en seis lanzamientos? ______

IV. Supongan ahora que la moneda está cargada de tal manera que la probabilidad de caer *sol* es el triple que la de caer *águila*.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos *soles* (S, S)? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *águila* y después *sol* (A, S)? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *sol* y después *águila* (S, A)? ______

d) ¿Cuáles de los eventos anteriores son equiprobables? ______________

e) ¿El juego será justo si uno pide (A, S) y el otro (S, A) y deciden lanzar dos veces la moneda? ______

V. Al parecer, este método funcionará sin importar cuál es la cara que tiene mayor probabilidad de salir. Vamos a demostrarlo de una manera general. Supongamos que la probabilidad de caer *águila* es p, con $0<p<1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga *sol*? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos *soles* (S, S)? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *águila* y después *sol* (A, S)? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero *sol* y después *águila* (S, A)? ______

e) ¿Cuáles de los eventos anteriores son equiprobables? ______________

f) ¿El juego será justo si uno pide (A, S) y el otro (S, A) y deciden lanzar dos veces la moneda? ______

g) ¿Qué ocurriría si $p = 0$, o si $p = 1$? ________________

h) ¿Este método funcionará también con una moneda que no esté cargada? ______ ¿Por qué? ________________

i) Si se ignora que la moneda está cargada, el método de lanzarla dos veces es justo porque ambos están en las mismas condiciones de elegir, pero también, desde el punto de vista de la probabilidad, ésta es ________

VI. Comparen sus respuestas a las actividades de esta lección con las de otros equipos. Si no coinciden, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

LECCIÓN 103

Juego justo (3)

Las tres cartas

Un juego de azar puede parecer justo sin serlo, por ello se necesita examinar detalladamente las situaciones que presenta e identificar, en la medida de lo posible, a los eventos elementales.

I. Se tienen tres cartas con las siguientes características: una tiene los dos lados rojos; otra tiene un lado rojo y el otro negro; la tercera tiene los dos lados negros. Designemos las cartas con (R, R), (R, N) y (N, N) respectivamente. La persona que lleva el juego oculta las cartas en una bolsa y pide al jugador que saque una al azar y que sin voltearla la ponga sobre la mesa. Ninguno de los dos ve las cartas restantes, ni la otra cara de la que está sobre la mesa.

a) Supongamos que la carta sobre la mesa tiene el color rojo hacia arriba. ¿Esa carta puede ser la (N, N)? ________

b) En ese caso, ¿cuál de las cartas puede ser la de la mesa? ________________

c) Si el lado que se ve es rojo, el otro puede ser ____________________

d) El que lleva el juego dice: "Apuesto 10 pesos a que el otro lado es rojo". ¿Cuánto debería pagar el jugador, en caso de perder, para que el juego sea justo? ________________

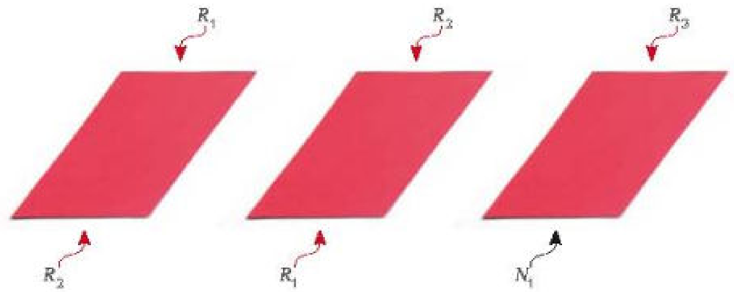
II. Para hacer un modelo de la situación anterior consideren detalladamente las posibilidades para ver los eventos elementales y su probabilidad. Nombren todas las caras de manera que se puedan distinguir unas de otras. La primera carta será (R_1, R_2), la segunda (R_3, N_1) y la tercera (N_2, N_3).

a) En total, considerando todas las cartas, ¿cuántas caras hay? ________

b) ¿Cuál puede ser la cara que se ve sobre la mesa? ________________

c) ¿Cuántas posibilidades hay para la otra cara de la carta sobre la mesa? ______

d) ¿Cuántas posibilidades hay para la carta que está sobre la mesa de acuerdo a la forma en que está colocada? ________



e) ¿Cuántas de esas posibilidades están a favor del jugador? ________

f) ¿Cuántas están en contra? ________

g) ¿Cuánto debería pagar el jugador, en caso de perder, para que el juego sea justo? ________

h) ¿Coincide con lo que contestaron en la actividad **I**? ________

III. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Si no coinciden, expongan sus razones y corrijan lo necesario.

Reto

En la televisión hay concursos cuya mecánica es la siguiente:

1) Al concursante se le ofrece la posibilidad de escoger entre tres puertas. Tras una de ellas se encuentra un lujoso automóvil, y tras cada una de las otras dos hay algo de poco valor. El concursante elige una puerta y gana el premio que se oculta detrás de ella.
2) Después de que el concursante elige una puerta, el presentador abre una de las otras dos puertas, mostrando uno de los premios de poca monta. Siempre puede hacer esto porque sabe lo que hay detrás de cada puerta.
3) Después de abrir esa puerta, le ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial y escoger otra de las puertas que continúan cerradas.

¿Debe cambiar su elección o no?, es decir, ¿en cuál de los dos casos, cambiando o no, tiene mayor probabilidad de quedarse con el auto?

Evaluación tipo Enlace

1. El producto de un número por la diferencia del mismo número menos 3 es igual a 180. ¿Cuál es el número?

a) –13 **b)** –11 **c)** 15 **d)** 17

2. Hace 2 años, la edad de Mauro era el triple de la edad que tenía Ernesto, pero dentro de 5 años, la edad de Mauro será el doble de la que tendrá Ernesto. ¿Qué edad tienen ahora?

a) M = 25, E = 8 **b)** M = 24, E = 9
c) M = 23, E = 9 **d)** M = 26, E = 10

3. Uno de los problemas que siguen se puede resolver con el sistema de ecuaciones

$$x + y = 13$$
$$x + 2y = 22$$

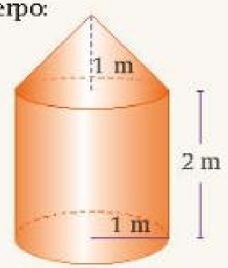
a) La suma de lápices y plumas es igual a 13 y el costo de un lápiz más dos plumas es $22. ¿Cuál es el costo de un lápiz y cuál el de una pluma?
b) La suma de gallinas y conejos en una granja es 13 y la suma de las patas de todos los animales es 22. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en la granja?
c) En un grupo de amigos, la suma de bicicletas y autos es igual a 13 y el número de ruedas es igual a 23. ¿Cuántas bicicletas y cuántos autos tienen?
d) La suma de las edades de dos niños es 13 y la edad de uno más el doble de la del otro es igual a 22. ¿Cuántos años tiene cada uno?

4. En la siguiente ilustración se muestra un rectángulo de cartulina de largo ℓ y ancho a, pegado a un popote por el lado ℓ. Si se gira el popote se genera un sólido de revolución. El volumen de este sólido se denota por:

a) $V = \pi \ell^2 a$
b) $V = \pi a^2 \ell$
c) $V = \pi a \ell$
d) $V = \dfrac{\pi a^2 \ell}{3}$

5. Calcula el volumen del siguiente cuerpo:

a) V = 7.33 m^3
b) V = 9.42 m^3
c) V = 12.56 m^3
d) V = 14.66 m^3

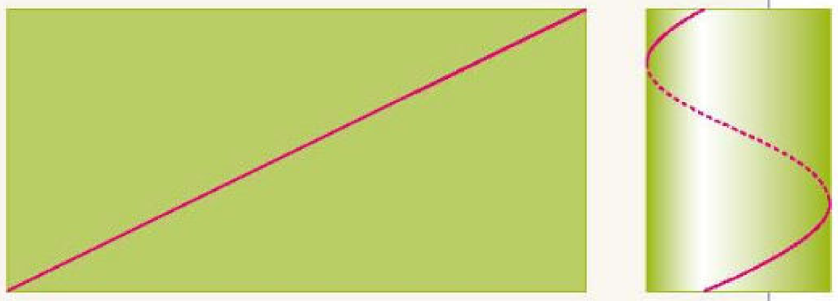


6. Un cono tiene 260 cm^3 de volumen y 4 cm de radio en su base. ¿Cuál es su altura?

a) 48.75 cm
b) 62.10 cm
c) 16.25 cm
d) 15.52 cm

7. En un rectángulo de papel, de 10 cm de ancho por 20 cm de largo, se traza una diagonal. Se forma un cilindro con el rectángulo de papel y la línea se ve como una curva, llamada hélice. En este caso, la hélice da exactamente una vuelta al cilindro y su longitud mide lo mismo que la diagonal trazada. ¿Cuántos centímetros debe medir una hélice en ese cilindro para que dé exactamente cuatro vueltas?

a) 89.44
b) 77.42
c) 44.72
d) 40.25



8. La altura del edificio "Revolución" es 3 veces la altura del edificio "Reforma". Si las alturas de ambos edificios suman 120 metros, la altura, en metros, del edificio más alto es de:

a) 30 **b)** 40
c) 80 **d)** 90

9. En este mes, José cumplió años en viernes. María, quien también cumplirá años este mes, ese día le dijo a José "Es curioso, si multiplicas el día de tu cumpleaños por el siguiente día que sea viernes, el resultado te da 30, ¡el día de mi cumpleaños!". María cumple años en

a) jueves **b)** viernes
c) sábado **d)** domingo

10. Unas amigas apuestan un peso cada una en un juego que es equiprobable. Quien gana el juego se lleva todas las apuestas. Después de que todas jugaron dos veces, Patricia terminó ganando 3 pesos. ¿Cuántas amigas eran?

a) 3 **b)** 4
c) 5 **d)** 6

Evaluación tipo PISA

Las pirámides de toronjas

Los tíos de Laura tienen un puesto de frutas en el mercado y le han pedido que los apoye en vacaciones. Lo primero que hacen es apilar cada uno de los diversos productos en montículos y Laura decide agrupar las toronjas en pirámides de base triangular o cuadrada para que luzcan más. Pero, como tiene que empezar a acomodarlas de abajo para arriba, su problema es calcular cuántas toronjas irán en la base y cuántas capas serán.

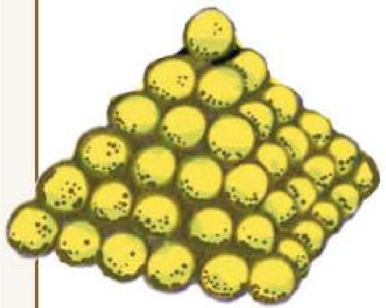


Figura ❶

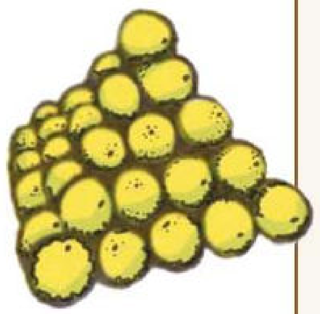


Figura ❷

Observa las figuras ❶ y ❷, considera que las capas se numeran de arriba hacia abajo. Dibuja, por separado, las cuatro primeras capas de la pirámide triangular. Haz lo mismo para la de base cuadrada. Cuenta, en ambos casos, cuántas toronjas hay en cada lado, cuántas son en cada capa y compara.

Capas de pirámide base triangular

Capas de pirámide base cuadrada

1. Analiza cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no. Escribe V o F en el recuadro, según sea el caso.

   a) El número de toronjas por lado de cada capa de la pirámide triangular es el mismo que en la cuadrangular. ☐

   b) Se necesitan más toronjas para formar la pirámide triangular. ☐

   c) Las capas de la pirámide cuadrangular, de arriba hacia abajo, contienen a los números cuadrados. Es decir, 1, 4, 9, 16, 25, etc. ☐

   d) El número de toronjas que se requieren para la n-ésima capa de la pirámide triangular, contando de arriba hacia abajo, lo calculamos con $\frac{n(n+1)}{2}$. ☐

2. ¿Cuántas toronjas se necesitarían para la capa número 25 de la pirámide triangular?, ¿cuántas para esa capa de la pirámide cuadrangular? ____________

3. Calcula la cantidad de toronjas que tendría cada una de las 15 primeras capas superiores en cada tipo de pirámide.

   a) Pirámide triangular: ____________

   b) Pirámide cuadrangular: ____________

4. Laura sólo tiene 900 toronjas. Para formar su montículo tiene que decidir qué tipo de pirámide usará, cuántas capas tendrá y, en su caso, cuántas toronjas le faltarían o sobrarían. Ayúdala a completar la siguiente tabla.

Tipo de pirámide	Número de capas	Número total de toronjas	Sobrantes
Base triangular			
Base cuadrada			

Plano de un icosaedro

Para usarse en la lección 28.

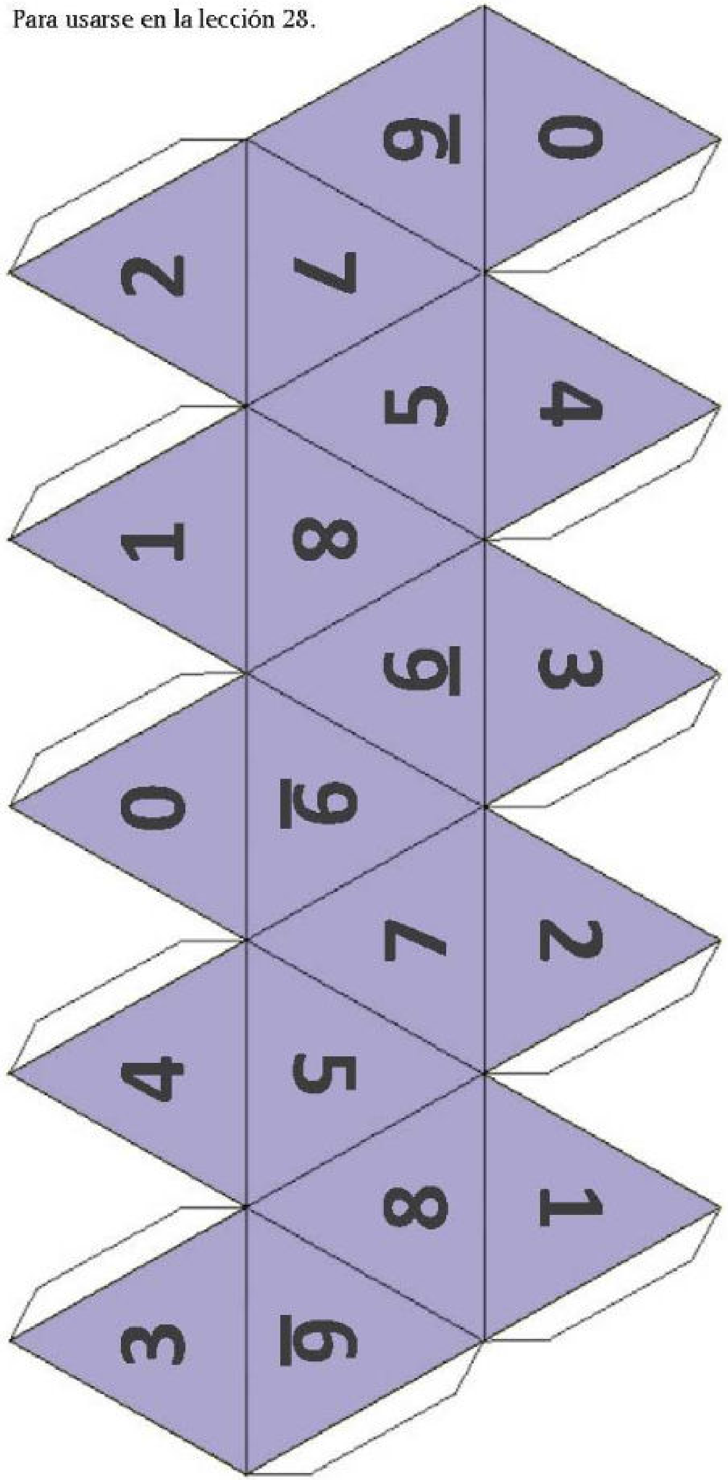


Tabla de razones trigonométricas

Para usarse en las lecciones 79, 80, 81 y 82.

Ángulo	seno	coseno	tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.09781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774

Ángulo	seno	coseno	tangente
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321

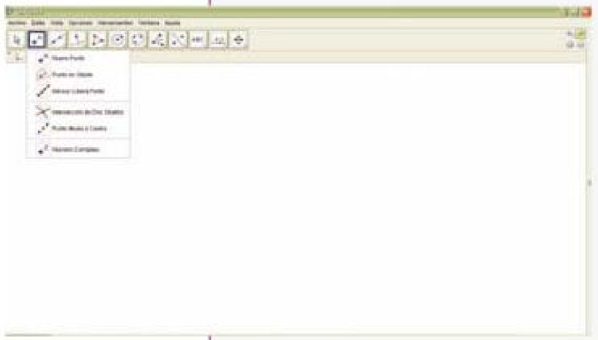
Ángulo	seno	coseno	tangente
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8,1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900

Explorar GeoGebra

Para realizar las actividades tecnológicas se requiere tener equipo de cómputo con acceso a Internet. Si no se dispone de un programa de *Geometría dinámica*, se recomienda usar *GeoGebra*, que es excelente y se puede descargar gratuitamente de www.geogebra.org. También incluye gráficas y hoja de cálculo, aunque ésta se puede obtener en otros programas.

Descripción

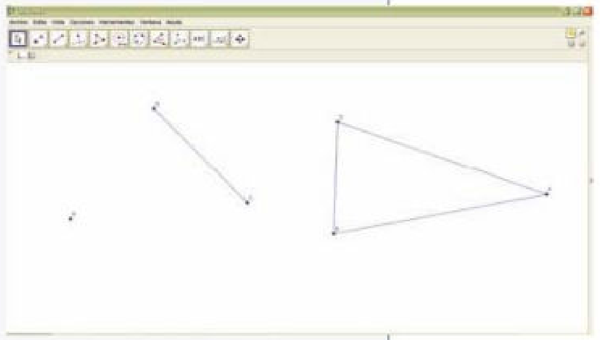
1. Al abrir el programa *GeoGebra* la pantalla inicial muestra en la parte superior el siguiente menú: *Archivo*, *Edita*, *Vista*, *Opciones*, *Herramientas*, *Ventana* y *Ayuda*.
2. La franja siguiente está formada por 12 botones que constituyen la esencia de *GeoGebra*.
3. Bajo esta franja aparece la zona de trabajo.
4. Se sugiere dar clic en cada opción del menú para ver su función.



5. En los botones específicos de *GeoGebra* basta con colocar el puntero del ratón sobre ellos para ver su nombre y la descripción básica de su función. Al dar clic en el ángulo inferior derecho, se despliegan sus herramientas específicas y sólo basta seleccionar la que se desee utilizar.
6. En la zona de trabajo están los campos *Vista Algebraica*, *Vista Gráfica* y la ventana *Apariencias* con cinco opciones; para dejar la zona en blanco se debe elegir la opción *Geometría*.

Ejercicios

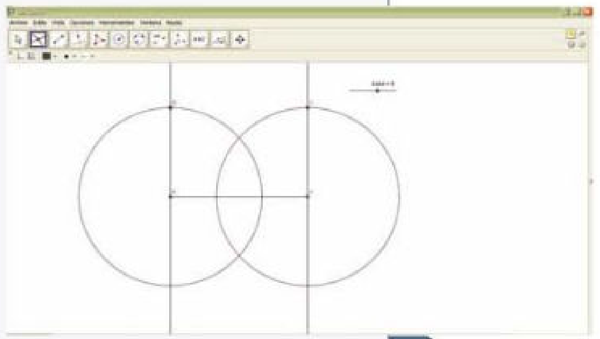
1. En el segundo botón selecciona la opción *Nuevo punto*.
2. Da clic en cualquier parte de la zona de trabajo. Aparece un punto (A).
3. Activa el primer botón (*Elige y mueve*). Da clic en el punto, arrástralo hacia donde quieras y suéltalo.
4. Activa otra vez *Nuevo punto* y marca otro punto (B) en la zona de trabajo.
5. En el tercer botón selecciona *Segmento entre dos puntos*.
6. Da clic en uno de los puntos y luego en el otro. Ahora están unidos por un segmento.



7. Selecciona *Elige y mueve*. Da clic en el segmento, arrástralo y déjalo donde quieras. Da clic en uno de los extremos del segmento y arrástralo; el segmento se alarga.
8. Activa el botón *Polígono* y traza un triángulo. Selecciona *Elige y mueve*, da clic dentro del triángulo y cámbialo de lugar. Da clic en uno de sus vértices y arrástralo para que cambien la forma y tamaño del triángulo.
9. Selecciona *Elige y mueve*. Posiciona el puntero en cualquiera de los objetos que creaste (punto, segmento, triángulo), da clic con el botón derecho y selecciona *Borra*; el objeto desaparece. Repite el proceso hasta que la zona de trabajo quede libre.

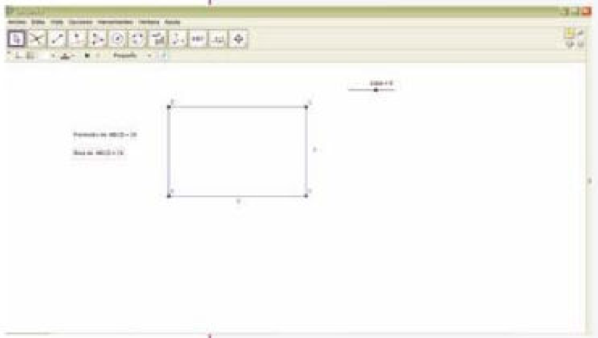
Generación de un rectángulo con perímetro constante de 20 cm.

1. Activa *Deslizador* en el penúltimo botón de izquierda a derecha y da clic en la zona de trabajo.
2. En la pantalla que aparece introduce el nombre "base", sin comillas. Introduce los valores del intervalo: mínimo 0 y máximo 10, deja el incremento en 0.1 y aplica.
3. En el tercer botón activa *Segmento de longitud fija*. Da clic en la zona de trabajo y aparecen un punto y una ventana para seleccionar la longitud del segmento. Para poder alterar las dimensiones del rectángulo sin modificar el perímetro, en lugar de asignar un número a la longitud, teclea "base", que es el rango del deslizador generado en el paso anterior. Puedes activar el primer botón y mover el deslizador para ver cómo se modifica el segmento.

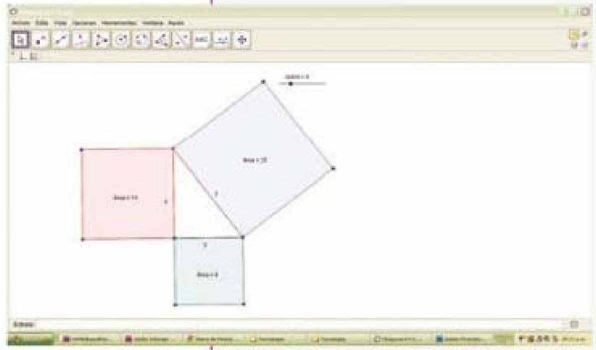


4. Para asegurar que los lados del rectángulo sean perpendiculares al segmento, activa *Recta perpendicular* en el cuarto botón y da clic en el segmento; aparece la recta perpendicular; llévala al punto de su extremo izquierdo y da clic; la perpendicular queda fija.

5. En el sexto botón activa *Circunferencia dados su centro y radio*. Da clic en el punto de intersección del segmento con la perpendicular. En la ventana que aparece teclea "10-base" y da clic en OK; aparece la circunferencia.
6. En el segundo botón activa *Intersección de dos objetos* y da clic en el punto donde se intersecan la circunferencia y la perpendicular al segmento; aparece un punto que garantiza y fija la ubicación exacta de la intersección.
7. En el extremo derecho del segmento repite los pasos 4, 5 y 6



8. Coloca el puntero en la circunferencia, da clic derecho y desactiva la opción Muestra objeto. Repite esta acción en todos los trazos auxiliares, hasta dejar únicamente los cuatro puntos que definen al rectángulo.
9. Activa *Polígono* en el quinto botón y da clic en los vértices del rectángulo, empezando en el inferior izquierdo y continuando en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta regresar al punto donde empezaste. Da clic de nuevo en este punto.
10. Activa *Distancia o longitud* en el octavo botón y da clic en dos lados adyacentes del rectángulo; aparecen sus medidas. Da clic dentro del rectángulo; aparece la medida del perímetro.
11. Activa *Elige y mueve*, arrastra los textos fuera del rectángulo y ubícalos convenientemente.
12. Activa *Área* en el octavo botón y da clic dentro del rectángulo; aparece el área. Repite el paso anterior para llevar el texto a otro lugar.
13. Activa *Elige y mueve* y en el deslizador mueve el punto a voluntad para que observes los cambios en la figura, en la medida de los lados y en el área.

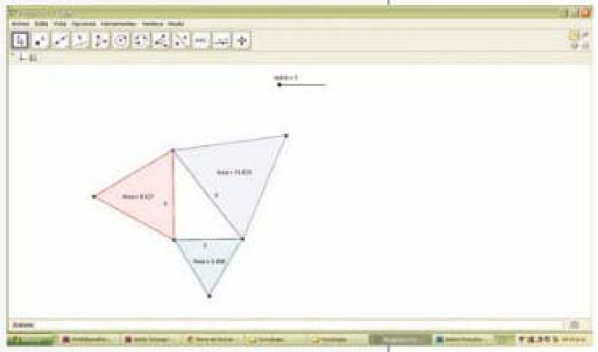


Teorema de Pitágoras

Construye un triángulo rectángulo:

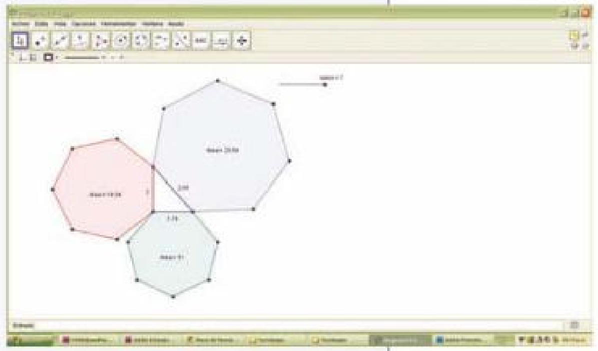
1. Selecciona *Nuevo punto* y marca dos puntos (*A* y *B*).
2. Selecciona *Segmento entre dos puntos* y une *A* y *B*.

3. Selecciona *Recta perpendicular* y traza una perpendicular por el punto *A*; marca un punto (*C*) en la perpendicular con *Nuevo punto*; une *B* con *C* y *C* con *A* (*Segmento entre dos puntos*); elimina trazos auxiliares.



4. Selecciona *Deslizador*, ubícalo con clic en algún punto arriba y a la derecha de *ABC* nómbralo "lados", con mínimo 3, máximo 7 e intervalos de 1. Con *Elige y mueve*, deja el deslizador en 4.
5. Selecciona *Polígono regular*, da clic en *B*, luego en *A* y en la pantalla que aparece con la leyenda "vértices", teclea "lados" (el nombre del deslizador) y clic en OK; aparece un cuadrado sobre el lado *AB* (si el cuadrado se "mete" en el triángulo ABC, oprime *Ctrl-Z* para deshacer la operación y repítela invirtiendo el orden en que tecleaste los vértices). Repite la operación en los demás vértices del triángulo *ABC*.

   Ahora tienes un triángulo rectángulo con un cuadrado en cada uno de sus lados.
6. En el octavo botón selecciona *Distancia o longitud* y da clic en cada lado del triángulo; aparecen sus medidas; si es necesario, arrástralas para que sean claramente visibles.



7. Selecciona *Elige y mueve* y mueve el vértice *C* hasta que los catetos midan exactamente 3 y 4.
8. Selecciona *Área* en el octavo botón y da clic en el interior de los cuadrados; aparece su área (9, 16 y 25).

   La construcción está completa, ahora presiona "*Esc*", mueve el deslizador y observa los cambios en la figura y en sus áreas.

   Verifica que el área de la figura construida sobre la hipotenusa sea igual a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos, independientemente de si son triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos o heptágonos.

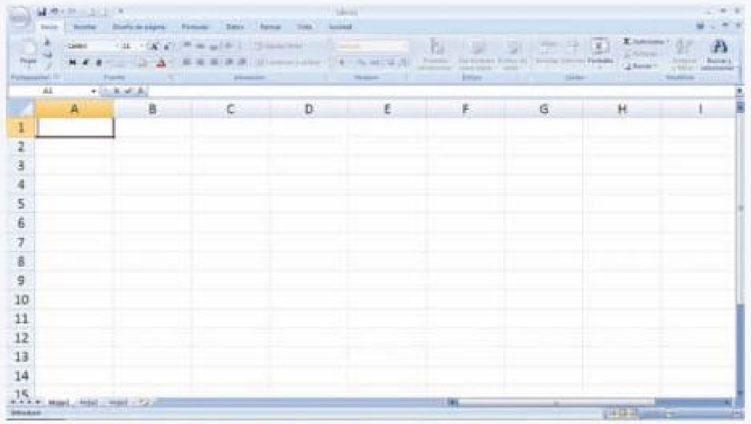
Esta es una pequeña muestra de lo que se puede hacer con *GeoGebra*. Es muy recomendable explorarlo constantemente para poder descubrir formas que ayudan a conocer mejor el vasto mundo de la geometría.

Hoja de cálculo para ecuaciones

Resolución de una ecuación cuadrática

1. Abre la Hoja de cálculo.

2. Escribe en la celda B2 "Resolución de una ecuación cuadrática"



3. En la celda B3 o B4, escribe "Forma de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$"

4. Una o dos filas más abajo escribe "Captura los coeficientes en las celdas amarillas".

5. En la misma columna B, pero una fila más abajo, escribe "*a*". Una celda a la derecha escribe "*b*" y en la que sigue, "*c*".

6. Coloca el puntero del ratón en la celda debajo de "*a*" y desplázalo dos celdas más a la derecha manteniendo oprimido el botón izquierdo.

7. Una vez seleccionadas las tres celdas debajo de *a*, *b* y *c*, rellénalas de color amarillo dando clic en el botón de herramientas correspondiente ("color de relleno", en el grupo Fuente, el penúltimo de izquierda a derecha).

8. Con la técnica de mantener oprimido el botón izquierdo del ratón, selecciona las tres celdas de los coeficientes *a*, *b*, y *c* y las tres amarillas que están debajo.

9. En el grupo Fuente de la barra de herramientas ubica el botón que está a la izquierda del Color de relleno y da clic en la pequeña cabeza de flecha.

10. En las opciones que se despliegan, da clic en la que dice "Todos los bordes".

11. En la fila donde están las letras *a*, *b*, *c* de los coeficientes, deja una columna en blanco y en las siguientes dos celdas a la derecha escribe "Discriminante" y "No. de soluciones".

12. Debajo del título "Discriminante", suponiendo que las celdas donde se capturan los coeficientes sean B7, C7, y D7, escribe "=C7 ^ 2–4*B7*D7".

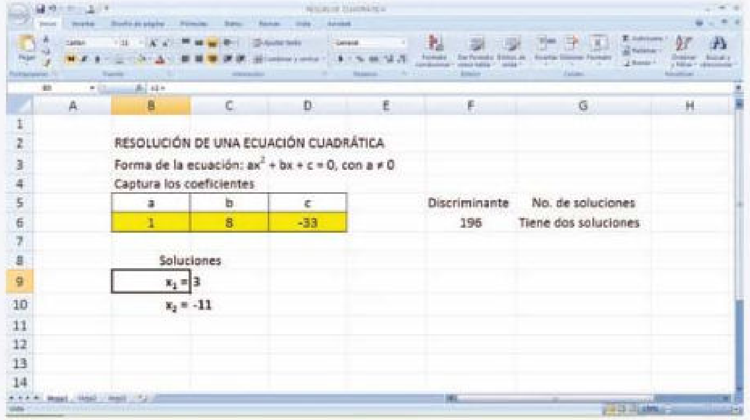
13. Debajo de "No. de soluciones", suponiendo que el cálculo del discriminante esté en la celda F7, escribe la siguiente fórmula:
=SI(F7<0,"No hay soluciones reales",SI(F7=0,"Tiene una solución","Tiene dos soluciones"))

14. Dos filas debajo de la primera celda amarilla, escribe "Soluciones".

15. En la celda debajo del título "Soluciones" escribe "x_1 = " y debajo de ésta escribe "x_2 = ".

16. En la celda que esté a la derecha de "x_1 = ", escribe
=SI(F7<0,"No real",(–C7+RAIZ(F7))/(2*B7))

17. En la celda que esté a la derecha de "x_2 = ", escribe
=SI(F7<0,"No real",(–C7–RAIZ(F7))/(2*B7))



Bibliografía

Para estudiantes

Alberro S., A. y Bulajich M., R. (2012). *Calendario Matemático Infantil 2012-2013*. México: Googol.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. J. (2008). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Bosch, C. (2009). *El billar no es de vagos. Ciencia, juego y diversión*. México: Fondo de Cultura Económica.

______ (2002). *Una ventana a la incertidumbre*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

______ *et al* (2004). *Una ventana a las formas*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

______ (2002). *Una ventana a las incógnitas*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

De la Peña, J. A. (2012). *Álgebra en todas partes*. México: Fondo de Cultura Económica.

______ (2002). *Geometría y el mundo*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

______ (2002). *Matemáticas y la vida cotidiana*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

Enzensberger, H. M. (1997). *El diablo de los números*. Madrid: Siruela.

Hernández Garciadiego, C. (2002). *La geometría en el deporte*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

______ (2002). *Matemáticas y deporte*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

Paenza, A. (2013). *¿Cómo, esto también es matemática?* Buenos Aires: Sudamericana.

Perelman, I. (2010). *Matemáticas recreativas*. México: Quinto Sol.

Prieto, C. (2005). *Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Rosenvasser, E. F. (2009). *Simetría. Izquierda y derecha, antes y después, chico y grande en el mundo*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Ruiz, C. *et al* (2002). *Crónicas algebraicas*, Biblioteca Juvenil Ilustrada. México: Santillana.

Sestier, B. A. (1989). *Historia de la matemática*. México: Limusa.

Tahan, M. (1994). *El hombre que calculaba*. México: Noriega Editores.

Valiente, S. (2009). *En el amable mundo de la matemática*. México: Ángeles Editores.

Páginas electrónicas para estudiantes

Barros, P. y Bravo, A. *Libros maravillosos*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.librosmaravillosos.com/

GeoGebra. *Descarga gratuita de GeoGebra*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.geogebra.org

GeoGebra. *Documento de Ayuda de GeoGebra*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.geogebra.org/help/docues.pdf

Habilidades Digitales para Todos. Plataforma educativa con materiales digitales. www.hdt.gob.mx/hdt/

Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa. *Red Escolar ILCE*, redescolar.ilce.edu.mx/proyectos/proyectos.html

INEGI. *Cuéntame. Información para niños y no tan niños*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://cuentame.inegi.org.mx/

Instituto de Matemáticas de la UNAM. *Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora*, puemac.matem.unam.mx

Mates y más. *Mates y más, portal web con contenido matemático*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.matesymas.es/

Para docentes

Ávila, A. (coord.) (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como guía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México: SEP.

Boyer, C. B. (2007). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kasner, E. y Newman, J. (2007). *Matemáticas e imaginación*. México: Conaculta.

Linares, F. (2003). "Matemáticas escolares y competencia matemática", en M. C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

SEP (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. México: Secretaría de Educación Pública.

Ströbl, W. (1980). *Matemática. Diccionarios Rioduero*. México: Ediplesa.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Páginas electrónicas para docentes

eLibros. Matemáticas. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.elibros.cl/matematicas.php

Estadística para todos. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.estadisticaparatodos.es/taller/graficas/cajas.html

Macho, S. M. *Matematicalia, revista digital de divulgación matemática*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.matematicalia.net/

Burgos, E. *¿Cómo ves? Revista de divulgación de la ciencia de la UNAM*. Recuperado el 6 de julio de 2013, de http://www.comoves.unam.mx/

Consultada para esta obra

Alarcón, J. B. (Coord.) (1999). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*, México: SEP.

Alcina, C. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Billstein, R. (1990). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. Redwood City, CA, USA: The Benjamin/Cummings.

Carter, A. J. *et al* (2013). *Geometry*. Columbus, OH, USA: McGraw-Hill.

Chevallard, Y. *et al* (2000). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Biblioteca del Normalista. México: SEP.

Craine, V. T. (Editor) (2009). *Understanding Geometry for a Changing World. Seventy-first Yearbook*. Reston, VA, USA: NCTM.

Fujii, T. y Matano, H. (Ed.). (2012). *Mathematics International. Grade 7*. Tokio, Japón: Tokyo Shoseki.

______. (2012). *Mathematics International. Grade 8*. Tokio, Japón: Tokyo Shoseki.

______. (2012). *Mathematics International. Grade 9*. Tokio, Japón: Tokyo Shoseki.

INEE (2005). *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*. México: INEE.

NCTM (2002). *Navigating through Algebra in Grades 9-12*. Reston, VA, USA: NCTM.

______ (2007). *Navigating through Geometry in Grades 6-8*. Reston, VA, USA: NCTM.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Seymour, D. y Shedd, M. (1981). *Diferencias finitas. Una técnica para resolver problemas*. México: CECSA.

Notas

Notas

Notas

Matemáticas 3.
Habilidades y competencias
se terminó de imprimir en diciembre de 2013 en
los talleres de Grupo Corme, J.M. Martínez 201,
Colonia Jacalones, Chalco, Estado de México.
C.P. 56600, Tel. (55) 5784 6177
moctezuma@corme.com.mx
Se imprimieron 5,000 ejemplares.